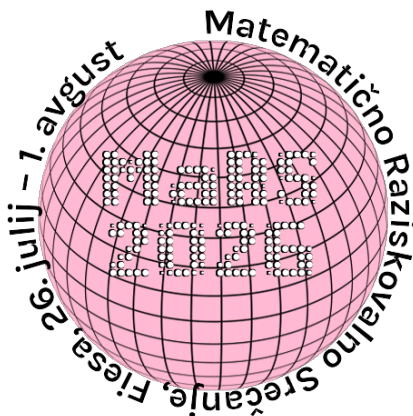


Apolonijev problem

Luka Krofl, Pija Pisar, Maja Vivod

Mentorica: Manca Ernst



Povzetek

V članku obravnavamo problem konstrukcije krožnice, tangentne trem danim krožnicam. Problem rešimo s pomočjo potence točke na krožnico in inverzije.

1 Potenca točke na krožnico

Definicija 1. Naj bo ω krožnica s središčem v O in polmerom r ter naj bo X poljubna točka v ravnini. Število

$$|XO|^2 - r^2$$

imenujemo **potenca točke X na krožnico ω** . Označimo ga s $P(X, \omega)$.

Iz definicije sledi, da je potenca točke na krožnico pozitivna, kadar točka leži zunaj krožnice, in negativna, kadar leži znotraj krožnice.

V nadaljevanju bomo v primerih, ko gre očitno za razdalje med točkami in ne za imena daljic, namesto z $|XO|$ dolžino daljice XO označili kar z XO . Oglejmo si naslednja izreka, ki povezujeta koncikličnost točk z razdaljami med njimi.

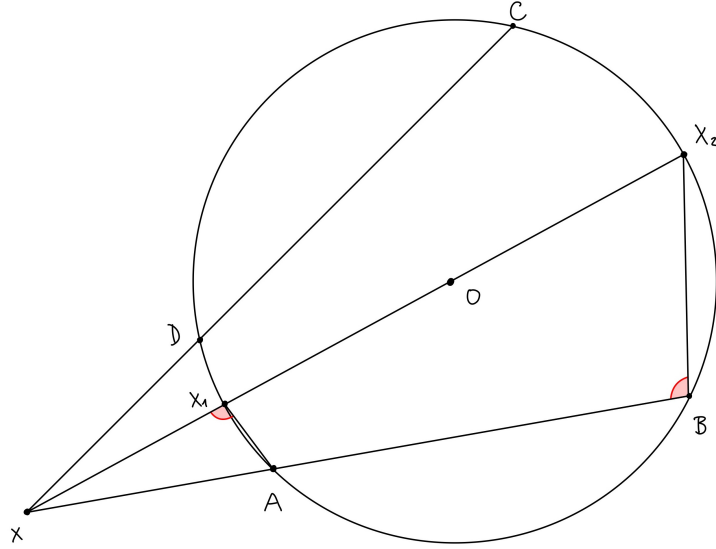
Izrek 1. Naj bodo A, B, C in D točke v ravnini, med katerimi nobene tri niso kolinearne. Naj bo točka X presečišče premic AB in CD . Točke A, B, C in D so konciklične natanko tedaj ko velja

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD.$$

Če so točke A, B, C in D konciklične, je zgornja vrednost enaka potenci točke X na krožnico, ki poteka skozi točke A, B, C in D .

Dokaz. Denimo, da so točke A, B, C in D konciklične. Naj bo O središče krožnice, ki poteka skozi te točke. Presečišči premice XO s krožnico označimo z X_1 in X_2 . Velja

$$\angle XX_1A = 180^\circ - \angle AX_1X_2.$$



Slika 1: Točke A, B, C in D so konciklične natanko tedaj ko velja $XA \cdot XB = XC \cdot XD$.

Iz koncikličnosti točk A, B, X_1 ter X_2 potem sledi

$$\angle XX_1A = \angle X_2BA.$$

Opazimo, da sta trikotnika $\triangle XAX_1$ in $\triangle XX_2B$ podobna, torej je

$$\frac{XA}{XX_1} = \frac{XX_2}{XB}$$

in

$$XA \cdot XB = XX_1 \cdot XX_2.$$

Če ponovimo postopek še za točki C in D , dobimo $XC \cdot XD = XX_1 \cdot XX_2$, torej velja

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD.$$

Pokažimo še, da je ta vrednost enaka potenci točke X na krožnico, ki poteka skozi točke A, B, C in D . Naj bo r polmer te krožnice. Ker točki X_1 in X_2 določata njen premer, lahko zapišemo

$$XX_1 \cdot XX_2 = (XO - r)(XO + r) = XO^2 - r^2 = P(X, \omega),$$

torej je res $XA \cdot XB = P(X, \omega)$.

Dokažimo še implikacijo v drugo smer. Predpostavimo, da velja $XA \cdot XB = XC \cdot XD$. Potem je

$$\frac{XA}{XC} = \frac{XD}{XB}.$$

Sledi, da sta $\triangle XAC$ in $\triangle XDB$ podobna. Velja

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle CAX = 180^\circ - \angle XDB = \angle BDC,$$

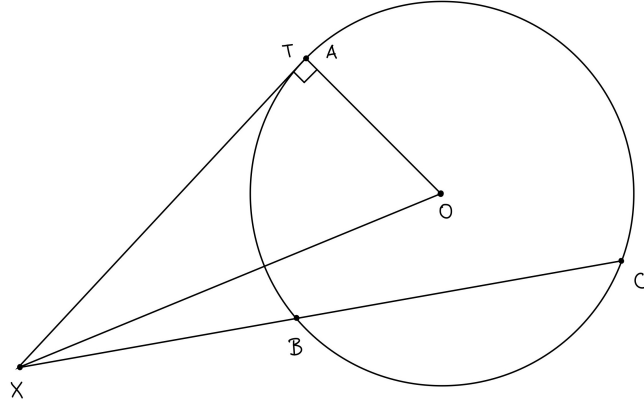
torej so točke A, B, C in D res konciklične. □

Pokažimo še poseben primer izreka 1.

Izrek 2. Naj bodo A, B in C nekolinearne točke in naj točka X leži na premici BC . Naj bo ω krožnica, ki poteka skozi te točke. Potem velja

$$XA^2 = XB \cdot XC$$

natanko tedaj ko je premica XA tangenta na to krožnico.



Slika 2: Premica XA je tangentna na krožnico, očrtano $\triangle ABC$, natanko tedaj ko velja $XA^2 = XC \cdot XD$.

Dokaz. Predpostavimo, da velja $XA^2 = XB \cdot XC$. Po izreku 1 velja, da je $XB \cdot XC = P(X, \omega)$. Ker je $XA^2 > 0$, je tudi $P(X, \omega) > 0$, torej točka X leži zunaj krožnice. Potem zagotovo obstaja tangenta na krožnico ω , ki poteka skozi točko X . Naj bo točka T dotikališče te tangente. Po Pitagorovem izreku velja

$$XT^2 = XO^2 - OT^2 = XO^2 - r^2 = P(X, \omega) = XA^2.$$

Iz tega sledi, da je $|XT| = |XA|$. Sedaj imamo dve možnosti; ali je $A = T$ in je XA tangenta na krožnico ω , ali pa je T dotikališče druge tangente iz točke X na to krožnico. Ker je $|XT| = |XA|$, je v tem primeru premica XA tudi tangentna na krožnico ω .

Dokažimo še drugo stran ekvivalence. Denimo, da je premica XA tangentna na očrtano krožnico trikotnika $\triangle ABC$. Potem velja

$$XA^2 = XO^2 - OA^2 = XO^2 - r^2 = P(X, \omega) = XB \cdot XC,$$

od koder sledi

$$XA^2 = XB \cdot XC.$$

□

1.1 Potenčna premica in potenčno središče

Poglejmo si, kako je videti množica točk, ki imajo na dve dani krožnici enako potenco.

Izrek 3 (Potenčna premica). *Naj bosta Γ_1 in Γ_2 krožnici v ravnini s središči v točkah O_1 in O_2 . Množica točk, za katere velja*

$$P(X, \Gamma_1) = P(X, \Gamma_2),$$

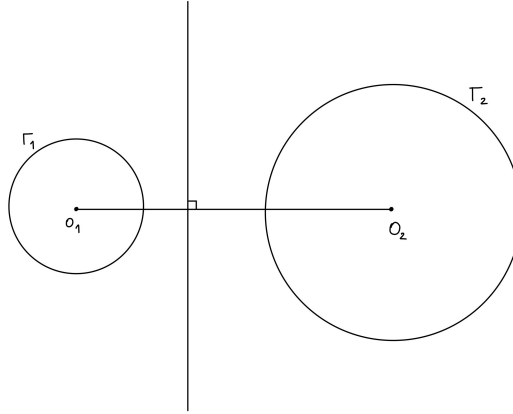
*je premica, pravokotna na zveznico med točkama O_1 in O_2 . Imenujemo jo **potenčna premica** krožnic Γ_1 in Γ_2 . Če se Γ_1 in Γ_2 sekata v točkah A in B , je njuna potenčna premica premica, ki poteka skozi točki A in B .*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z uvedbo koordinatnega sistema. Recimo, da ima krožnica Γ_1 polmer r_1 in se njeno središče nahaja v točki $(a, 0)$, krožnica Γ_2 pa ima polmer r_2 in središče v točki $(b, 0)$, kjer $a \neq b$. Naj bo X točka s koordinatami (x, y) . Za potenco X na krožnico Γ_1 velja

$$P(X, \Gamma_1) = (x - a)^2 + y^2 - r_1^2,$$

za potenco X na Γ_2 pa

$$P(X, \Gamma_2) = (x - b)^2 + y^2 - r_2^2.$$



Slika 3: Potenčna premica.

Ker sta potenci enaki, velja

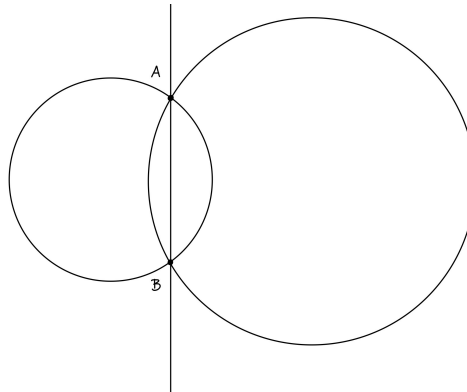
$$\begin{aligned}(x-a)^2 + y^2 - r_1^2 &= (x-b)^2 + y^2 - r_2^2, \\ -2xa + a^2 - r_1^2 &= -2xb + b^2 - r_2^2, \\ x &= \frac{r_1^2 - r_2^2 + b^2 - a^2}{2b - 2a}.\end{aligned}$$

Ker vemo, da $a \neq b$, smo v zgornjem računu smeli deliti z izrazom $2b - 2a$. Opazimo, da je x konstanten, y pa je poljuben. Točke oblike (x, y) , ki imajo enako potenco na obe krožnici, torej opišejo premico z enačbo $x = c$, ki je pravokotna na x -os.

Poglejmo si še primer, ko se krožnici Γ_1 in Γ_2 sekata v točkah A in B . Ker ti točki ležita na obeh krožnicah, je

$$P(A, \Gamma_1) = P(A, \Gamma_2) = P(B, \Gamma_2) = P(B, \Gamma_1) = 0,$$

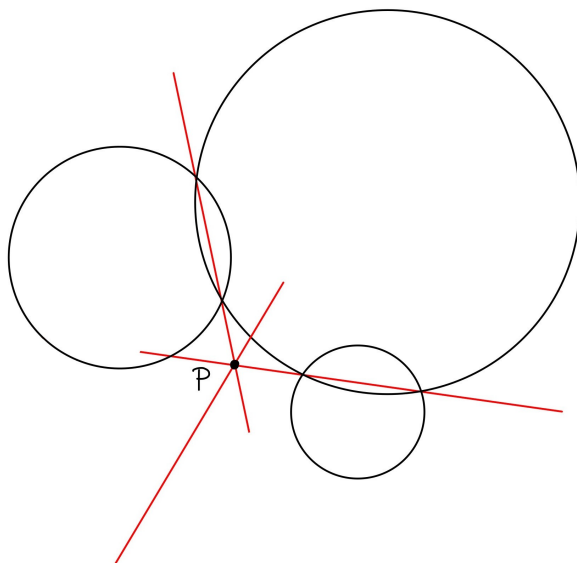
kar pomeni, da je njuna potenčna premica res premica, ki poteka skozi točki A in B . □



Slika 4: Potenčna premica krožnic, ki se sekata v točkah A in B .

Izrek 4 (Potenčno središče). *Naj bodo Γ_1 , Γ_2 in Γ_3 krožnice v ravnini in naj bodo O_1 , O_2 in O_3 zaporedoma njihova središča.*

1. Če so točke O_1 , O_2 in O_3 kolinearne, so potenčne premice krožnic Γ_1 , Γ_2 in Γ_3 vzporedne.
2. Če točke O_1 , O_2 in O_3 niso kolinearne, se njihove potenčne premice sekajo v eni točki. To točko imenujemo **potenčno središče**.



Slika 5: Potenčno središče treh krožnic.

Dokaz. Poglejmo si najprej primer, ko so točke O_1 , O_2 in O_3 kolinearne. Ker je potenčna premica dveh krožnic pravokotna na zveznico med njunimi središči, so potenčne premice Γ_1 in Γ_2 , Γ_1 in Γ_3 ter Γ_2 in Γ_3 vzporedne.

Denimo sedaj, da točke O_1 , O_2 in O_3 ne ležijo na isti premici. Naj bo p_{ij} potenčna premica krožnic s središčema v O_i in O_j , pri čemer sta $i, j \in \{1, 2, 3\}$, in naj bo X presečišče premic p_{12} in p_{23} . Vemo, da je

$$P(X, \Gamma_1) = P(X, \Gamma_2) \text{ in } P(X, \Gamma_2) = P(X, \Gamma_3),$$

iz česar sledi

$$P(X, \Gamma_1) = P(X, \Gamma_3).$$

Pokazali smo torej, da se potenčne premice p_{12} , p_{23} in p_{13} res sekajo v eni točki. □

2 Inverzija

Definicija 2. *Inverzijska ravnina* je evklidska ravnina z dodano točko P_∞ v neskončnosti. Točka P_∞ leži na vsaki premici v ravnini.

Poglejmo si, kaj smo dosegli s tem, ko smo ravnini dodali točko v neskončnosti. Premice si zdaj lahko predstavljamo kot krožnice z neskončnim polmerom. Opazimo, da se vsaki dve premici sekata natanko v dveh točkah, razen, če sta vzporedni – v tem primeru se sekata v eni.

Definicija 3. Naj bo ω krožnica s središčem v O in polmerom r . **Inverzija preko ω** je preslikava, ki

- točko O preslika v točko P_∞ ,
- točko P_∞ preslika v točko O ,
- vsako drugo točko X preslika v točko X' , ki leži na poltraku OX , tako da velja $OX \cdot OX' = r^2$.

Inverzijo lahko razložimo tudi geometrijsko. Naj bo ω krožnica s središčem v O in X točka v ravnini, ki leži izven krožnice ω . Narišimo obe tangenti na krožnico, ki potekata skozi točko X . Naj bosta točki D_1 in D_2 točki, v katerih se tangenti dotikata krožnice. Točka X' naj bo presečišče premic D_1D_2 in XO . Ker sta kota $\angle D_1XO$ in $\angle OD_1X'$ enako velika, sta trikotnika $\triangle OXD_1$ in $\triangle OD_1X'$ podobna. Od tod sledi

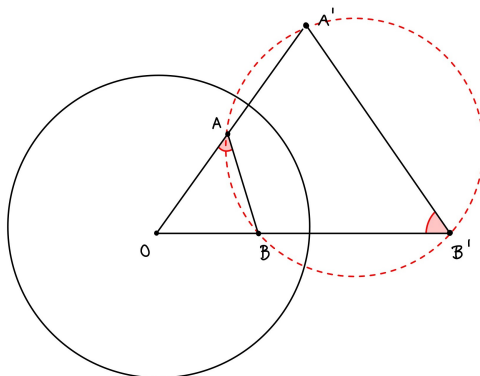
$$\frac{OX}{OD_1} = \frac{OD_1}{OX'}$$

kjer r označuje polmer krožnice ω . Vsaka točka X v zunanosti krožnice ω se torej slika v razpolovišče daljice D_1D_2 , kjer sta D_1 in D_2 dotikališči tangent skozi X na krožnico ω .

Zdaj si lahko še pogledamo, kam inverzija slika različne objekte. Zanima nas, kam se slika premica, ki poteka skozi središče O krožnice ω . Opazimo, da se točki A in B , v katerih premica seka krožnico, ohranita. Po definiciji vemo, da se vse točke z inverzijo preslikajo na zveznico med središčem krožnice in med točko, ki jo invertiramo. Tako vemo, da se premica, ki poteka skozi središče krožnice, preslika sama vase. Za ostale primere si bomo pomagali z naslednjo lemo.

$$\angle OAB \equiv \angle A'B'O.$$
$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB',$$
$$\angle OAB = 180^\circ - \angle BAA' = \angle A'B'B = \angle A'B'O,$$

9

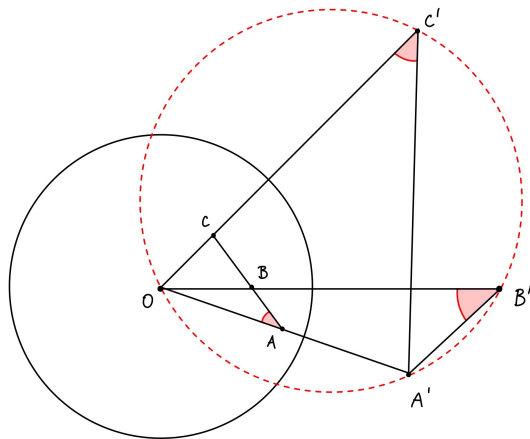


6

Poglejmo si še, kam inverzija slika premice, ki ne potekajo skozi središče krožnice ω , preko katere slikamo. Naj bodo točke A , B in C kolinearne in naj bodo A' , B' in C' slike teh točk pod inverzijo. Po lemi 1 velja

$$\angle OB'A' = \angle BAO = \angle CAO = \angle OC'A'.$$

Od tod sledi, da so točke O , A' , B' in C' konciklične. Tako se premica AB slika v krožnico, očrtano v trikotniku $\triangle OA'B'$.



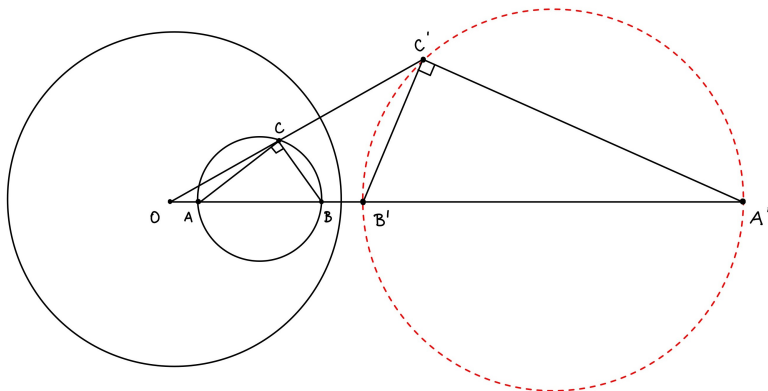
Slika 8: Inverzija premice, ki ne poteka skozi središče inverzije.

Poglejmo si še, kako inverzija slika krožnico, ki jo določajo točke A , B in C ter leži znotraj krožnice ω , preko katere jo slikamo. Naj bosta A in B taki točki, da je AB premer krožnice in točka O leži na premici AB . Naj bodo točke A' , B' in C' zaporedoma inverzi točk A , B in C . Dovolj je, da pokažemo, da je daljica $A'B'$ premer inverzne krožnice.

Vemo, da je $\angle ACB = \angle OCB - \angle OCA$. Po lemi 1 velja

$$90^\circ = \angle C'B'O - \angle C'A'O = 180^\circ - \angle A'B'C' - \angle C'A'B' = \angle B'C'A'.$$

S tem smo pokazali, da točka C' leži na krožnici s premerom $A'B'$.

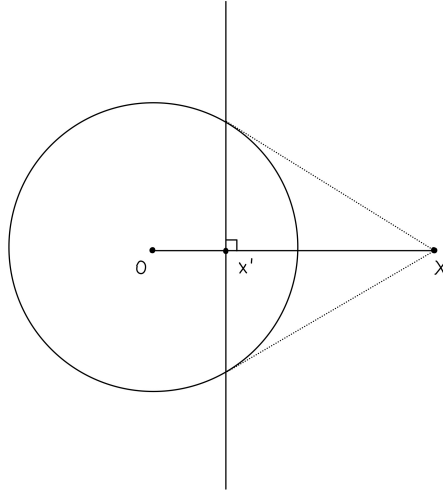


Slika 9: Inverzija krožnice.

2.1 Pol in polara

Pri konstrukciji si bomo pomagali tudi s polom in polaro.

Definicija 4. Naj bo ω krožnica s središčem v O in naj bo X točka v ravnini. Naj bo X' njen inverz glede na ω . **Polara** je premica, ki poteka skozi točko X' in je pravokotna na premico, ki poteka skozi točki O in X . Točko X potem imenujemo **pol** premice.



Slika 10: Pol in polara.

Izrek 5. *Točka X leži na polari točke Y natanko tedaj ko točka Y leži na polari točke X .*

Dokaz. Naj bo ω krožnica s središčem v O in polmerom r in naj bo X točka v ravnini. Naj bosta točka X' inverz točke X glede na ω in premica p polara točke X . Naj bo Y točka, ki leži na premici p . Vemo, da je premica p pravokotna na premico OX , saj je polara pravokotna na zveznico med središčem in polom, torej je daljica YX' pravokotna na premico OX .

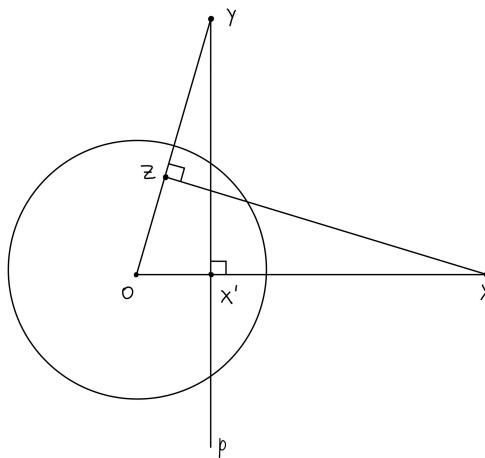
Naj bo Z taka točka na premici OY , da je premica XZ pravokotna na premico OY . Opazimo, da sta trikotnika $\triangle OXZ$ in $\triangle OYX'$ podobna, saj imata skupen kot $\angle XOY$ in sta oba pravokotna. Od tod sledi

$$\frac{OY}{OX} = \frac{OX'}{OZ}.$$

Ker je točka X' inverz točke X glede na ω , lahko zapišemo $OX \cdot OX' = r^2$, iz česar potem sledi

$$OY \cdot OZ = OX' \cdot OX = r^2.$$

To pomeni, da je točka Z inverz točke Y glede na ω , torej leži na polari točke Y . Ker je premica XZ pravokotna na premico OY , tudi točka X leži na polari točke Y , kar zaključuje dokaz. $\square$

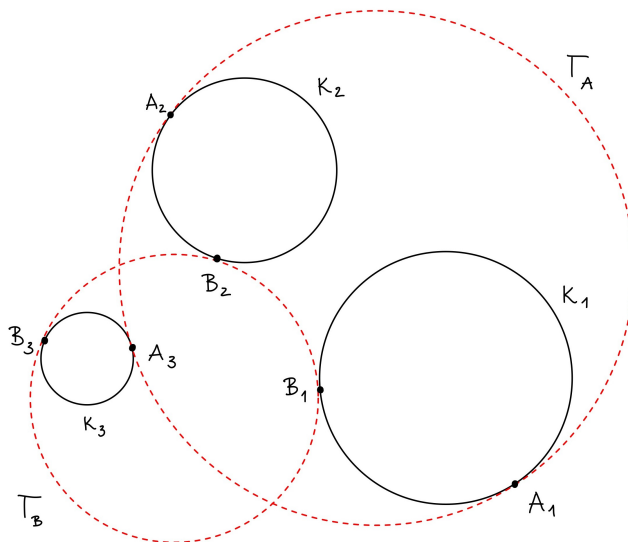


Slika 11: Točka X leži na polari točke Y natanko tedaj ko točka Y leži na polari točke X .

3 Rešitev problema

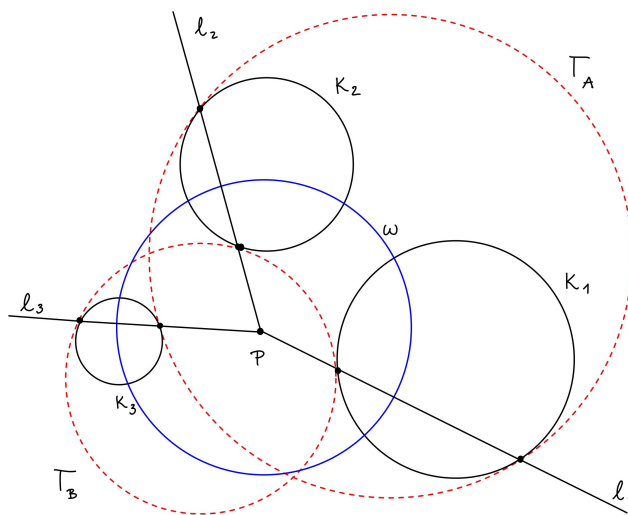
Sedaj lahko pokažemo konstrukcijo krožnic, tangentnih trem danim krožnicam. Rešitve bomo poiskali v parih.

Naj bodo K_1 , K_2 in K_3 krožnice v ravnini in naj bosta Γ_A ter Γ_B iskan par krožnic, tangentnih krožnicam K_1 , K_2 in K_3 . Z A_i in B_i , kjer je $i \in \{1, 2, 3\}$, označimo točke, v katerih sta krožnici Γ_A ter Γ_B tangentni danim trem krožnicam. Krožnici Γ_A in Γ_B bomo konstruirali tako, da bomo za vsak i poiskali premico l_i , na kateri ležita točki A_i in B_i .



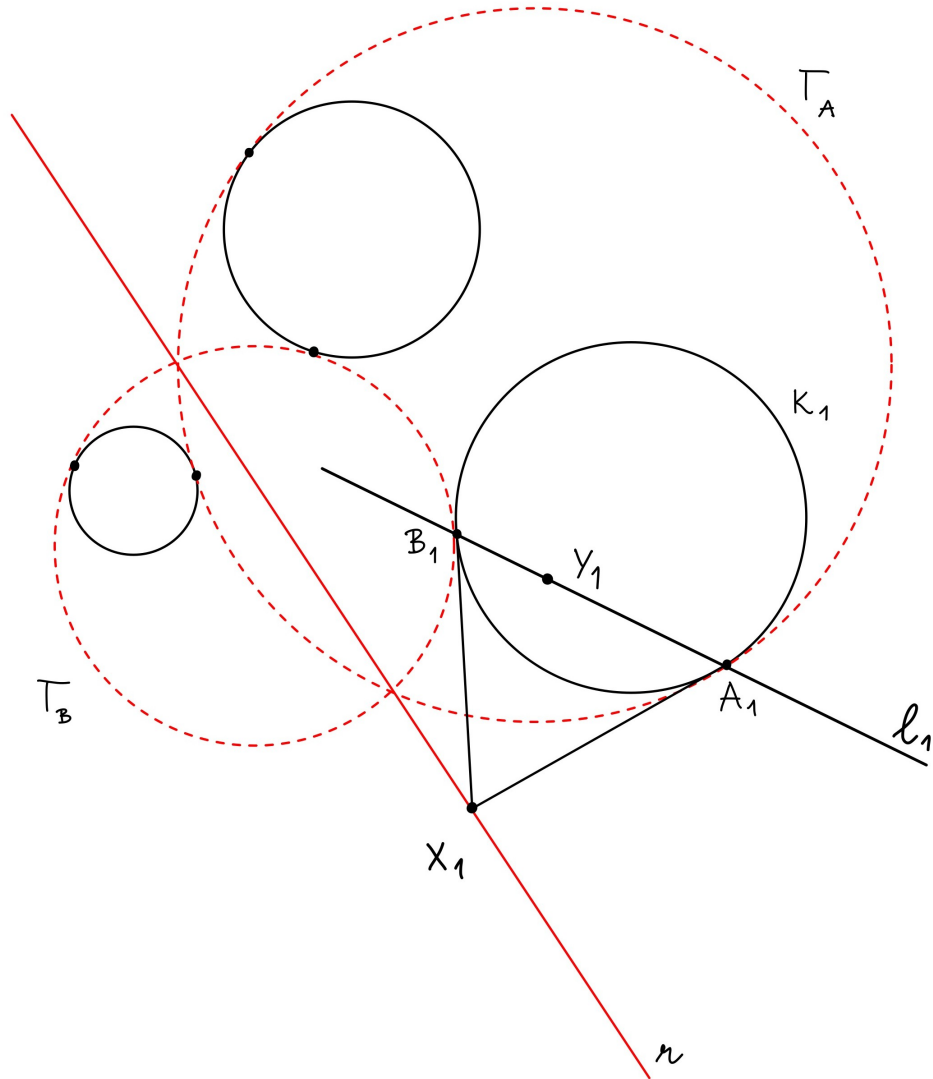
Slika 12: Krožnice K_1 , K_2 in K_3 ter njim tangentni krožnici Γ_A in Γ_B .

Naj bo P potenčno središče krožnic K_1 , K_2 in K_3 in naj bo ω krožnica s središčem v P , ki pravokotno seka dane krožnice. Opazimo, da se z inverzijo glede na krožnico ω krožnica K_i ohrani, krožnici Γ_A in Γ_B , ki ju želimo konstruirati, pa se preslikata druga v drugo. Prav tako se druga v drugo preslikata točki A_i in B_i . Ker je središče opisane inverzije potenčno središče P , ta točka zagotovo leži na iskani premici l_i .



Slika 13: Krožnica ω ter premice l_1 , l_2 in l_3 .

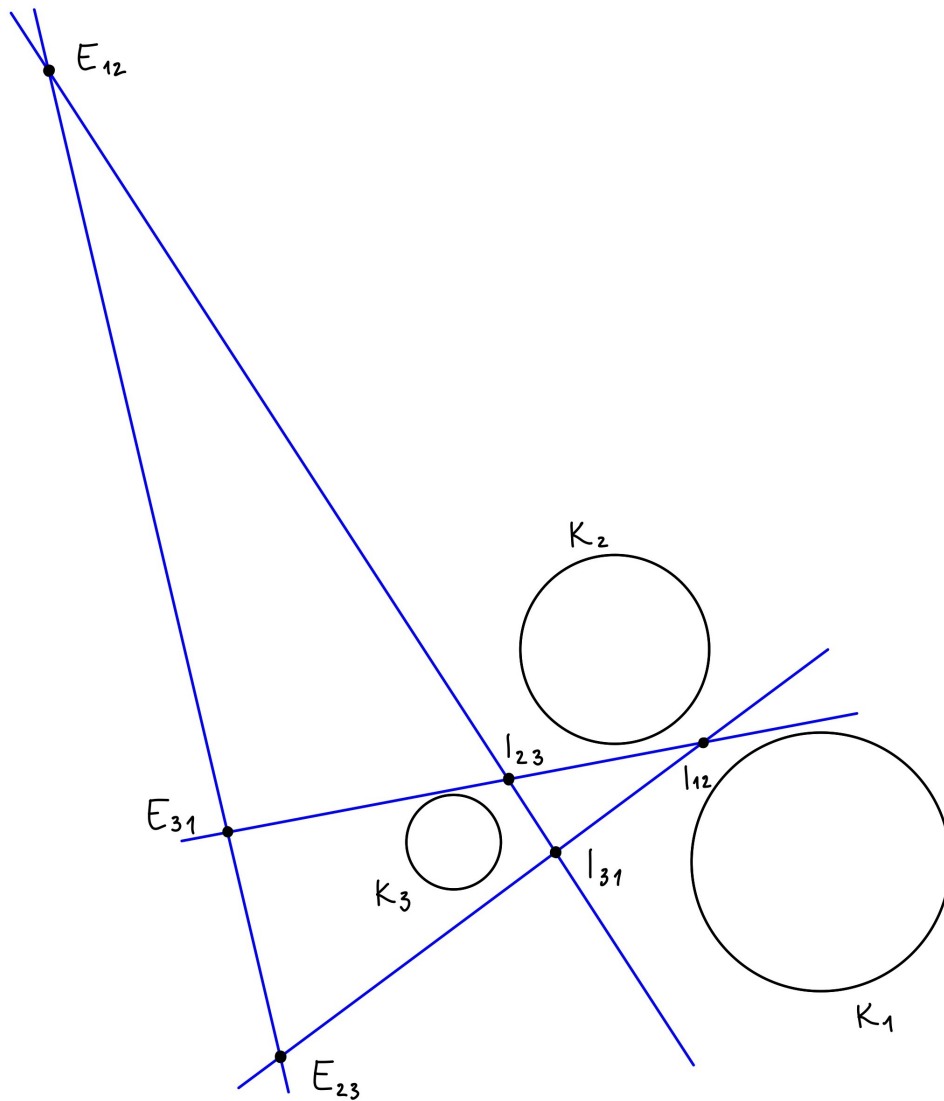
Za konstrukcijo druge točke, ki leži na premici l_i , si pogledjmo tangenti na krožnico K_i , ki potekata skozi točki A_i in B_i . Naj bo X_i presečišče teh tangent. Točka X_i je potem pol premice l_i . Ker sta razdalji med točkama A_i in B_i ter polom enaki, je $P(X_i, \Gamma_A) = P(X_i, \Gamma_B)$, torej točka X_i leži na potenčni premici r krožnic Γ_A in Γ_B . Po izreku 5 potem pol Y_i premice r leži na premici l_i . To je torej druga točka, ki jo potrebujemo za konstrukcijo premice l_i .



Slika 14: Pol Y_i premice r je druga iskana točka, ki leži na premici l_i .

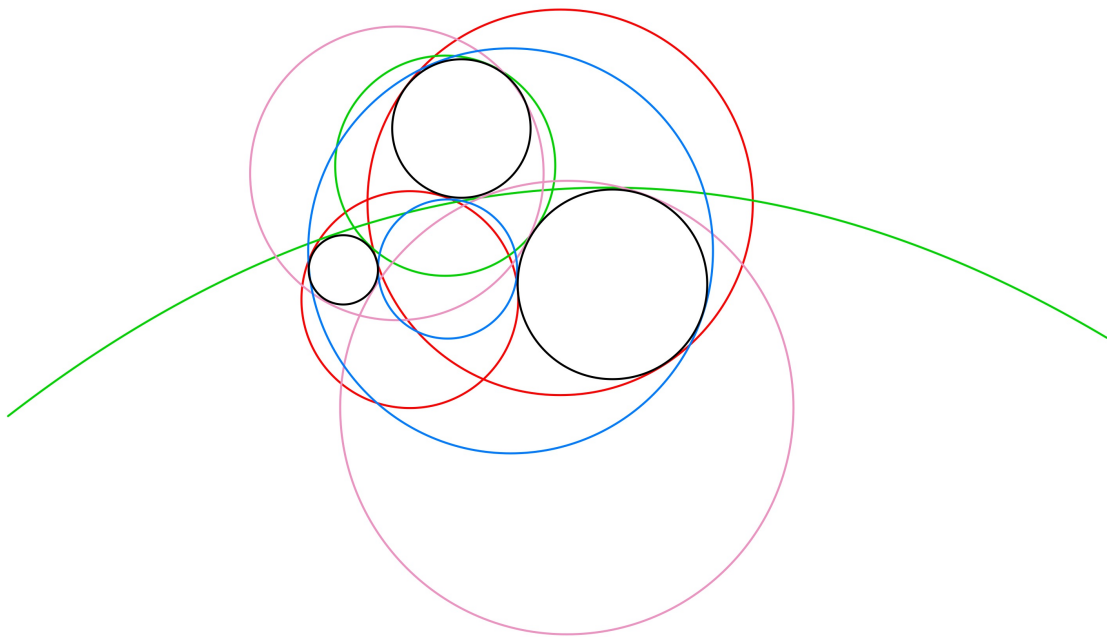
Poglejmo si krožnici K_1 in K_2 . Zanju konstruirajmo notranje središče homotetije I_{12} in zunanje središče homotetije E_{12} tako, da poiščemo presečišči njunih skupnih tangent. Enako naredimo še za preostala para danih krožnic, da dobimo točke I_{23} , E_{23} , I_{31} in E_{31} . Po Mongevem izreku te točke ležijo na natanko štirih premicah, prikazanih na sliki 15. Izkaže se, da je vsaka od teh premic ravno potenčna premica enega od parov krožnic Γ_A in Γ_B , ki jih želimo konstruirati¹. Ker so take premice štiri, obstaja osem krožnic, ki rešijo naš problem.

¹Dokaz lahko bralec najde v [1].



Slika 15: Premice, ki jih določajo središča homotetije.

Problem torej rešimo tako, da za vsak $i \in \{1, 2, 3\}$ konstruiramo premico l_i , ki poteka skozi točki A_i in B_i , v katerih sta krožnici Γ_A in Γ_B tangentni na eno od danih krožnic K_i . Premico l_i določimo z dvema točkama. Prva je potenčno središče P krožnic K_1 , K_2 in K_3 , druga pa pol Y_i ene od premic, ki jih določajo središča homotetije, glede na krožnico K_i . Če postopek ponovimo z vsemi štirimi premicami, dobimo vseh osem rešitev Apolonijevega problema, prikazanih na sliki 16.



Slika 16: Krožnice, tangentne trem danim krožnicam.

Literatura

- [1] Dörrie, H. (1965). 100 Great Problems of Elementary Mathematics : Their History and Solution. Dover Publications.
- [2] Chen, E. (2016). Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. The Mathematical Association of America.