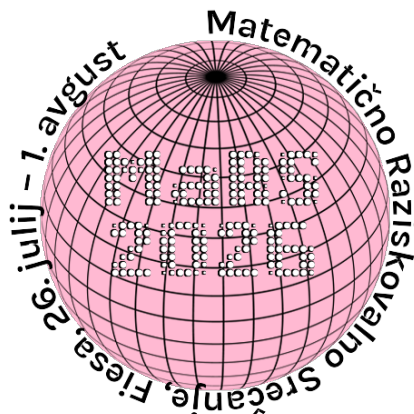


Diskretni račun

Zarja Čibej, Ana Helbl

Mentor: Tim Milanez



Povzetek

Z uvedbo pojmov difference in antidifference funkcije kot diskretnih analogov odvoda in nedoločenega integrala raziščemo metode računanja končnih vsot, ki jih interpretiramo kot diskretni analog določenega integrala.

1 Uvod

Diskretni račun je matematično področje, ki se ukvarja z računanjem vsot s končno mnogo členi. Razumemo ga lahko kot diskretni analog diferencialnega in integralnega računa, v katerem pojem odvoda zamenja razlika zaporednih členov, določeni integral pa vsota s končnim številom členov. Takim vsotam bomo rekli *končne vsote*.

Med najbolj znanimi končnimi vsotami je vsota prvih n naravnih števil, za katero velja znana formula

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Do te formule lahko pridemo na več različnih načinov, na primer algebraično ali geometrijsko, najpogostejše pa se jo dokaže z indukcijo. Težava z indukcijo je, da moramo formulo vnaprej poznati. Kako bi na primer uganili formulo za vsoto prvih n kvadratov

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

ki nima tako lepe formule kot prejšnja vsota? Pri tovrstnih vprašanjih nam diskretni račun ponudi sistematično orodje reševanja.

Preden se potopimo v svet diskretnega računa, uvedimo še primerno notacijo. Vsoto členov zaporedja $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ bomo označevali z

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

kjer grška Σ (sigma) ponazarja besedo “vsota” (lat. *summa*). Indeks k , po katerem seštevamo, imenujemo *sumacijski indeks*. Izbira oznake sumacijskega indeksa je poljubna:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{x=1}^n a_x.$$

Formulo za vsoto prvih n naravnih števil lahko sedaj kompaktno zapišemo kot

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

V diskretnem računu se člene vsote pogosto obravnava kot vrednosti funkcije, tj. $a_k = f(k)$. Vsota prvih n členov zaporedja potem postane

$$\sum_{x=1}^n f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

Na primer, pri vsoti prvih n naravnih števil seštevamo vrednosti funkcije $f(x) = x$, pri vsoti prvih n kvadratov pa vrednosti funkcije $f(x) = x^2$.

Ker bomo funkcije skozi celotni članek obravnavali kot člene neke vsote, bo njihovo definicijsko območje vedno vsebovano v množici celih števil $\mathbb{Z}$.

2 Diferenca funkcije

Definicija 1. *Diferenca funkcije $f(x)$ je izraz*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

*Simbolu Δ pravimo **diferenčni operator**.*

Diferenca funkcije šteje, za koliko se v naslednjem koraku spremeni vrednost funkcije. To lahko predstavimo tudi z enačbo

$$f(x+1) = f(x) + \Delta f(x). \quad (1)$$

Drugače povedano, da pridemo do naslednje vrednosti funkcije, moramo prejšnji vrednosti prišteti diferenco.

Zgled 1. *Poračunajmo difference osnovnih funkcij.*

- (1) *Ker se vrednost konstantne funkcije ne spreminja, je njena diferenca enaka 0. To bi lahko preverili tudi z računom*

$$\Delta c = c - c = 0.$$

- (2) *Vrednost funkcije $f(x) = x$ se v vsakem koraku poveča za natanko eno enoto, kot pokaže račun*

$$\Delta x = x + 1 - x = 1.$$

- (3) *V primeru kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ je diferenco že malce težje ugotoviti. Račun pokaže*

$$\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$$

Na enak način poračunamo diferenco funkcije $f(x) = x^3$, ki je enaka

$$\Delta x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

- (4) *Diferenca eksponentne funkcije z osnovo $a \geq 0$ je enaka*

$$\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)a^x.$$

Ista formula velja tudi, kadar je $a < 0$ (eksponentna funkcija z negativno osnovo je v našem primeru dobro definirana, saj smo predpostavili, da je definicijsko območje vseh obravnavanih funkcij vsebovano v množici celih števil).

Pri $a = 2$ dobimo

$$\Delta 2^x = 2^x.$$

(5) V primeru logaritemske funkcije z osnovo $a > 0$ velja

$$\Delta \log_a(x) = \log_a(x+1) - \log_a(x) = \log_a\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

(6) Iz formul za faktorizacijo kotnih funkcij sledita zvezi

$$\Delta \sin(ax+b) = 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(ax+b+\frac{a}{2}\right),$$

$$\Delta \cos(ax+b) = -2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(ax+b+\frac{a}{2}\right).$$

Ker difference funkcije ne želimo vsakič računati po definiciji, si oglejmo nekaj lastnosti, ki jim zadošča diferenčni operator.

Trditev 1 (Linearnost diferenčnega operatorja). Diferenčni operator Δ je *linearen*, tj. zadošča lastnostma

$$(i) \quad \Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x),$$

$$(ii) \quad \Delta[c \cdot f(x)] = c \cdot \Delta f(x).$$

Dokaz. Lastnosti preprosto sledita iz definicije difference:

(i)

$$\begin{aligned} \Delta[f(x) + g(x)] &= f(x+1) + g(x+1) - (f(x) + g(x)) \\ &= f(x+1) - f(x) + g(x+1) - g(x) \\ &= \Delta f(x) + \Delta g(x), \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \Delta[c \cdot f(x)] &= c \cdot f(x+1) - c \cdot f(x) \\ &= c \cdot (f(x+1) - f(x)) \\ &= c \cdot \Delta f(x). \end{aligned}$$

□

Trditev 2 (Pravilo produkta). Diferenca produkta dveh funkcij zadošča pravilu

$$\Delta[f(x) \cdot g(x)] = \Delta f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot \Delta g(x).$$

Dokaz. Upoštevajoč formulo (1) in definicijo difference, velja račun

$$\begin{aligned} \Delta[f(x) \cdot g(x)] &= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\ &= (f(x) + \Delta f(x)) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\ &= \Delta f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\ &= \Delta f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot \Delta g(x). \end{aligned}$$

□

Opomba 1. Imamo tudi naslednjo formulo za diferenco kvocienta dveh funkcij

$$\Delta \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\Delta f(x)g(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)},$$

ki pa je v tem članku ne bomo potrebovali.

2.1 Padajoče potence

Pri računanju diferenc znanih funkcij smo opazili, da difference potenčnih funkcij $f(x) = x^m$ nimajo prav lepe oblike, ko je $m \geq 2$. Oglejmo si še enkrat formulo, ko je $m = 2$:

$$\Delta x^2 = 2x + 1.$$

Vemo, da je $\Delta x = 1$, torej lahko zgornjo formulo zapišemo kot

$$\Delta x^2 - \Delta x = 2x.$$

Po linearnosti lahko razliko diferenc na levi strani zapišemo kot diferenco razlike, kar pokaže

$$\Delta[x^2 - x] = 2x,$$

oziroma

$$\Delta[x(x-1)] = 2x. \quad (2)$$

Diferenca izraza $x(x-1)(x-2)$ ima tudi lepo obliko, in sicer

$$\Delta[x(x-1)(x-2)] = 3x(x-1). \quad (3)$$

To nas motivira vpeljati naslednjo definicijo.

Definicija 2. *Padajoča potenca števila x je izraz*

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)(x-2) \cdots (x-m+1)}^{m \text{ členov}},$$

kjer je $m \in \mathbb{N}$. Oznako $x^{\underline{m}}$ preberemo kot "x na m padajoče". Po dogovoru je $x^{\underline{0}} = 1$.

V novih oznakah imata formuli (2) in (3) sedaj obliko

$$\Delta x^{\underline{2}} = 2x^{\underline{1}},$$

$$\Delta x^{\underline{3}} = 3x^{\underline{2}}.$$

To nas vodi do naslednjega sklepa.

Izrek 1. *Za vsako naravno število m velja*

$$\Delta x^{\underline{m}} = m \cdot x^{\underline{m-1}}.$$

Dokaz. Ker je $\Delta x = 1$ in $x^{\underline{0}} = 1$, formula drži za $m = 1$. Za $m \geq 2$ velja račun

$$\begin{aligned} \Delta x^{\underline{m}} &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\ &= (x+1)x(x-1) \cdots (x-m+2) - x(x-1)(x-2) \cdots (x-m+2)(x-m+1) \\ &= x(x-1)(x-2) \cdots (x-m+2)((x+1) - (x-m+1)) \\ &= m \cdot x^{\underline{m-1}}. \end{aligned}$$

□

2.2 Negativne padajoče potence

Padajočo potenco lahko razširimo na negativne potence, in sicer preko formule

$$x^{\underline{m}} = (x-m+1)x^{\underline{m-1}}. \quad (4)$$

Zgornja formula podaja induktivno zvezo, ki ji padajoča potenca zadošča. Za definicijo padajoče potence bi lahko uporabili tudi to formulo, le podati bi morali še začetni člen $x^{\underline{0}}$, ki smo mu po dogovoru dali

vrednost 1. Vse višje padajoče potence se potem da poračunati z uporabo (4). Če v (4) izrazimo $x^{\overline{m-1}}$ in zamaknemo potenco, dobimo zvezo

$$x^{\overline{m}} = \frac{x^{\overline{m+1}}}{x - m}.$$

Ta nam pove, kako izračunati $x^{\overline{m}}$, če poznamo $x^{\overline{m+1}}$. To nas vodi do definicije **negativne padajoče potence**

$$x^{\overline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)},$$

kjer je $m \in \mathbb{N}$.

Pokažimo, da za diferenco negativne padajoče potence velja ista formula kot za pozitivne padajoče potence.

Trditev 3. Za vsak $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ velja

$$\Delta x^{\overline{-m}} = -m \cdot x^{\overline{-m-1}}.$$

Dokaz. Dokaz je zelo podoben dokazu izreka 1, le da tukaj sedaj nastopijo ulomki. Za $m = 0$ formula očitno drži, za $m \geq 1$ pa velja račun

$$\begin{aligned} \Delta x^{\overline{-m}} &= (x+1)^{\overline{-m}} - x^{\overline{-m}} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m)(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)} \\ &= \frac{x+1 - (x+m+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m+1)} \\ &= -m \cdot x^{\overline{-m-1}}. \end{aligned}$$

□

V tabeli 1 so zbrane difference osnovnih funkcij, ki jih bomo uporabili v nadaljevanju članka.

$f(x)$	$\Delta f(x)$
c	0
x	1
$x^{\overline{m}}, m \in \mathbb{Z}$	$m \cdot x^{\overline{m-1}}$
a^x	$a^x(a-1)$
2^x	2^x
$\sin(ax+b)$	$2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(ax+b+\frac{a}{2}\right)$
$\cos(ax+b)$	$-2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(ax+b+\frac{a}{2}\right)$

Tabela 1: Difference osnovnih funkcij.

3 Antidiferenca

Bralcem, ki poznajo pojem odvoda in integrala, naslednja definicija ne bi smela biti preveč tuja.

Definicija 3. Funkciji $F(x)$, za katero velja

$$\Delta F(x) = f(x)$$

pravimo **antidiferenca** funkcije $f(x)$.

Antidiferenca služi kot neke vrste inverz diferenčnega operatorja. Razlog, zakaj je pojem antidiference tako pomemben, bomo spoznali v naslednjem poglavju, v tem poglavju pa bomo razvili metode računanja antidiferenc funkcij.

Preden začnemo s primeri, povejmo besedo še o enoličnosti antidiference. Recimo, da je poleg $F(x)$ tudi $G(x)$ antidiferenca funkcije $f(x)$. Potem velja

$$\Delta F(x) = f(x) = \Delta G(x).$$

Po linearnosti diferenčnega operatorja lahko zgornjo enakost zapišemo kot

$$\Delta(G(x) - F(x)) = 0.$$

Definirajmo novo funkcijo $C(x) = G(x) - F(x)$. Po zgornji enačbi zanjo velja

$$\Delta C(x) = 0.$$

Ta enačba pove, da se vrednosti funkcije $C(x)$ ne spreminjajo, torej je $C(x)$ konstantna funkcija. Pišimo $C(x) = C$. Po definiciji funkcije $C(x)$ velja

$$G(x) - F(x) = C,$$

oziroma

$$G(x) = F(x) + C.$$

Pokazali smo, da če poznamo eno antidiferenco $F(x)$ funkcije $f(x)$, so vse ostale antidiference oblike $F(x) + C$ za poljubno konstanto C .

Definicija 4. Družino vseh antidiferenc označimo z

$$\sum_x f(x) = F(x) + C$$

in ji pravimo **nedoločena vsota** funkcije $f(x)$.

Da izračunamo antidiferenco neke funkcije $f(x)$, moramo poiskati takšno funkcijo $F(x)$, katere diferenca se ujema s funkcijo $f(x)$. Diference pomembnih funkcij imamo zbrane v tabeli 1. Iz nje lahko na primer razberemo, da je $\Delta x = 1$, kar nam pove, da je antidiferenca konstantne funkcije $f(x) = 1$ enaka identični funkciji, tj.

$$\sum_x 1 = x + C.$$

Podobno lahko sklepamo, da je antidiferenca funkcije 2^x kar funkcija sama, saj velja $\Delta 2^x = 2^x$. Za padajoče potence velja zveza

$$\Delta x^m = m \cdot x^{m-1}.$$

Po linearnosti diferenčnega operatorja torej velja

$$\Delta \left[\frac{x^m}{m} \right] = x^{m-1},$$

kar pokaže

$$\sum_x x^{m-1} = \frac{x^m}{m} + C.$$

Ta formula velja za $m \neq 0$. V primeru, ko je $m = 0$ in računamo antidiferenco funkcije $x^{-1} = \frac{1}{x+1}$, je težje izračunati antidiferenco. Da pridemo do nje, moramo malo goljufati in preskočiti do izreka 3, ki nam izraža antidiferenco funkcije s končno vsoto. V našem primeru je to vsota

$$H_x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}.$$

Enostavno je preveriti, da je diferenca zgornje vsote res enaka $\frac{1}{x+1}$. Števila H_x , kjer je $x \in \mathbb{N}$, imenujemo **harmonična števila**.

Če upoštevamo še druge vrstice v tabeli 1, lahko zapišemo tabelo antidiferenc pripadajočih funkcij (glej tabelo 2).

V tabeli 2 moramo paziti, da ni dovoljeno vstaviti vseh vrednosti parametrov m , a in b . Primer padajoče potence pri $m = -1$ smo že razrešili. Prav tako je jasno, kaj je antidiferenca eksponentne funkcije z osnovo $a = 1$. Pri računanju antidiference kotnih funkcij za $a = 2\pi k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$, si pomagamo z naslednjo trditvijo.

$f(x)$	Antidiferenca $f(x)$
1	x
$x^m, m \neq -1$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$
$a^x, a \neq 1$	$\frac{a^x}{a-1}$
2^x	2^x
$\sin(ax+b), a \neq 2\pi k$	$-\frac{1}{2\sin(\frac{a}{2})} \cos(ax+b-\frac{a}{2})$
$\cos(ax+b), a \neq 2\pi k$	$\frac{1}{2\sin(\frac{a}{2})} \sin(ax+b-\frac{a}{2})$

Tabela 2: Antidiference osnovnih funkcij.

Trditev 4. Naj bo $f(x)$ funkcija s periodo T , tj. $f(x+T) = f(x)$ za vsak x . Potem velja

$$\sum_x f(Tx+b) = x \cdot f(Tx+b) + C.$$

Dokaz. Velja račun

$$\begin{aligned}
\Delta[x \cdot f(Tx+b)] &= (x+1) \cdot f(T(x+1)+b) - x \cdot f(Tx+b) \\
&= (x+1) \cdot f(Tx+b+T) - x \cdot f(Tx+b) \\
&= (x+1) \cdot f(Tx+b) - x \cdot f(Tx+b) \\
&= f(Tx+b)(x+1-x) \\
&= f(Tx+b).
\end{aligned}$$

□

Zgled 2. Z uporabo tabele 2 in trditve 4 lahko poračunamo

$$\begin{aligned}
\sum_x \cos x &= \frac{1}{2\sin \frac{1}{2}} \sin \left(x - \frac{1}{2}\right) + C, \\
\sum_x \cos(2\pi x) &= x \cos(2\pi x) + C.
\end{aligned}$$

Kot smo že omenili, nam antidiferenca, in s tem tudi nedoločena vsota, podajata nekakšen inverz diference. Linearnost, ki ji zadošča diferenčni operator Δ , se zato prenese tudi na nedoločeno vsoto.

Trditev 5 (Linearnost nedoločene vsote). Nedoločena vsota je linearna, tj. velja

- (i) $\sum_x [f(x) + g(x)] = \sum_x f(x) + \sum_x g(x)$,
- (ii) $\sum_x [c \cdot f(x)] = c \cdot \sum_x f(x)$.

Čeprav je dokaz te trditve lahek, je precej tehničen, zato ga bomo izpustili.

Še ena metoda za računanje nedoločenih vsot pride iz pravila produkta

$$\Delta[f(x) \cdot g(x)] = \Delta f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot \Delta g(x).$$

Če uporabimo nedoločeno vsoto Σ_x na obeh straneh zgornje enačbe, se na levi strani Σ_x izniči z Δ , saj sta si drug drugemu inverzna, in dobimo

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_x \Delta f(x) \cdot g(x+1) + \sum_x f(x) \cdot \Delta g(x).$$

Od tod sledi formula za seštevanje po delih, ki je diskretni analog metode per partes.

Izrek 2 (Seštevanje po delih). Velja

$$\sum_x f(x) \cdot \Delta g(x) = f(x) \cdot g(x) - \sum_x \Delta f(x) \cdot g(x+1).$$

Zgled 3. Oglejmo si uporabo metode seštevanja po delih na nedoločeni vsoti

$$\sum_x (x-1) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Glavna ideja metode je, da za $f(x)$ in $\Delta g(x)$ izberemo takšni funkciji, da bosta izraza $\Delta f(x)$ in $g(x)$ enostavnejša. V našem primeru lahko vzamemo

$$f(x) = x - 1, \quad \Delta g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Potem je

$$\Delta f(x) = 1$$

in

$$g(x) = -\frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Po seštevanju po delih je iskana nedoločena vsota enaka

$$\begin{aligned} & (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) - \sum_x 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_x \cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

4 Računanje končnih vsot

Povezavo med končno vsoto in nedoločeno vsoto podaja naslednji izrek.

Izrek 3 (Osnovni izrek diskretnega računa). Naj bo $F(x)$ antidiferenca $f(x)$ in $b > a$ celi števili. Potem velja

$$\sum_{x=a}^b f(x) = F(b+1) - F(a).$$

Če vpeljemo oznako $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, lahko zgornji izrek zapišemo kot

$$\sum_{x=a}^b f(x) = F(x) \Big|_a^{b+1},$$

kjer je

$$\sum_x f(x) = F(x) + C.$$

Dokaz. Po definiciji antidiference je $\Delta F(x) = f(x)$, zato velja

$$\begin{aligned} \sum_{x=a}^b f(x) &= \sum_{x=a}^b \Delta F(x) \\ &= \sum_{x=a}^b [F(x+1) - F(x)] \\ &= F(a+1) - F(a) + F(a+2) - F(a+1) + F(a+3) - F(a+2) + \cdots + \\ &\quad + F(b) - F(b-1) + F(b+1) - F(b) \\ &= F(b+1) - F(a), \end{aligned}$$

kjer smo v zadnjem koraku upoštevali, da se odštejejo vsi členi, razen dveh. □

Zgled 4. (1) Poiščimo formulo za vsoto

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Če želimo uporabiti izrek 3, moramo izračunati nedoločeno vsoto funkcije x^2 . Poznane so nam že nedoločene vsote padajočih potenc, zato si pomagajmo z njimi:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n x^2 &= \sum_{x=1}^n [x^2 - x + x] = \sum_{x=1}^n [x(x-1) + x] = \sum_{x=1}^n x^2 + \sum_{x=1}^n x^1 = \frac{x^3}{3} \Big|_1^{n+1} + \frac{x^2}{2} \Big|_1^{n+1} = \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3} \Big|_1^{n+1} + \frac{x(x-1)}{2} \Big|_1^{n+1} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} - 0 + \left(\frac{n(n+1)}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

(2) Izračunajmo vsoto prvih n členov vrste

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Ta vsota ima v sumacijski notaciji obliko

$$\sum_{x=0}^n \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Iščemo torej nedoločeno vsoto izraza $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$. To pa je ravno definicija padajoče potence x^{-2} . Iskana vsota je enaka

$$\sum_{x=0}^n x^{-2} = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_0^{n+1} = -\frac{1}{x+1} \Big|_0^{n+1} = -\left(\frac{1}{n+2} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

(3) Izračunajmo vsoto prvih n kubov, tj. vsoto

$$\sum_{x=1}^n x^3.$$

Ker poznamo antidiference padajočih potenc, se nam splača izraz x^3 zapisati kot linearno kombinacijo padajočih potenc nižje ali enake stopnje. Iščemo torej takšne konstante a, b, c in d , da velja

$$x^3 = ax^3 + bx^2 + cx^1 + d.$$

Če v zgornji enačbi upoštevamo definicijo padajočih potenc in razstavimo ulomke, dobimo

$$x^3 = ax^3 - 3ax^2 + 2ax + bx^2 - bx + cx + d.$$

Zgornjo enakost lahko sedaj gledamo kot enakost polinomov v spremenljivki x . Ker sta dva polinoma enaka natanko tedaj, ko imata enake koeficiente, lahko koeficiente pred istimi stopnjami enačimo, kar nas privede do sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} 1 &= a, \\ 0 &= -3a + b, \\ 0 &= 2a - b + c, \\ 0 &= d. \end{aligned}$$

Dobimo $a = 1, b = 3, c = 1$ in $d = 0$. Polinom x^3 lahko torej zapišemo kot

$$x^3 = x^3 + 3x^2 + x^1.$$

Po linearnosti nedoločene vsote velja

$$\sum_x [x^3 + 3x^2 + x^1] = \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Začetna vsota je torej enaka

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^{n+1} &= \left(\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4} + x(x-1)(x-2) + \frac{x(x-1)}{2} \right) \Big|_1^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} - (0+0+0). \end{aligned}$$

Zadnja vrstica se poenostavi do izraza

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Če upoštevamo formulo za izračun vsote prvih n naravnih števil, pridemo do zanimivega spoznanja: vsota prvih n kubov je enaka kvadratu vsote prvih n naravnih števil

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

(4) Dajmo še s pomočjo diskretnega računa izračunati prvih n členov geometrijske vrste

$$1 + a + a^2 + \dots$$

Ta vsota je enaka

$$\sum_{x=0}^n a^x = \frac{a^x}{a-1} \Big|_0^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{1}{a-1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1}.$$

Če želimo pri računanju končne vsote uporabiti seštevanje po delih, moramo paziti, da meje porazdelimo na oba člena.

Zgled 5. Oglejmo si vsoto

$$\sum_{x=1}^n (x+1)(x+2) \cdot 2^x.$$

Opazimo, da je izraz $(x+1)(x+2)$ ravno enak zamaknjeni padajoči potenci $(x+2)^2$. Enostavno je preveriti, da tudi za zamaknjene padajoče potence veljajo iste formule kot za padajoče potence, in sicer imamo

$$\sum_x (x+a)^m = \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1}.$$

Uporabimo seštevanje po delih za funkciji

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^2, & \Delta g(x) &= 2^x, \\ \Delta f(x) &= 2(x+2)^1, & g(x) &= 2^x, \end{aligned}$$

po katerem je začetna vsota enaka

$$\begin{aligned} (x+2)^2 \cdot 2^x \Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^n 2(x+2)^1 \cdot 2^{x+1} &= \\ = (x+2)(x+1) \cdot 2^x \Big|_1^{n+1} - 4 \sum_{x=1}^n (x+2) \cdot 2^x &= \\ = (n+3)(n+2) \cdot 2^{n+1} - 12 - 4 \sum_{x=1}^n (x+2) \cdot 2^x. \end{aligned}$$

Vsoto v zadnji vrstici lahko ponovno poračunamo s pomočjo seštevanja po delih. Če za funkciji izberemo

$$\begin{aligned} u(x) &= x + 2, & \Delta v(x) &= 2^x, \\ \Delta u(x) &= 1, & v(x) &= 2^x, \end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n (x+2) \cdot 2^x &= (x+2) \cdot 2^x \Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^n 2^{x+1} = \\ &= (n+3) \cdot 2^{n+1} - 6 - 2 \cdot 2^x \Big|_1^{n+1} = \\ &= (n+3) \cdot 2^{n+1} - 6 - 2(2^{n+1} - 2) = \\ &= (n+1) \cdot 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

Če to vstavimo v prejšnji izraz in poenostavimo, dobimo rezultat

$$\sum_{x=1}^n (x+1)(x+2) \cdot 2^x = (n+2)(n+1) \cdot 2^{n+1} - 4.$$

Za konec rešimo še eno težjo nalogo.

Naloga 1. Poišči vsoto prvih n členov vrste

$$\frac{1^2 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3 \cdot 4} + \frac{3^2 \cdot 4^3}{4 \cdot 5} + \dots$$

Rešitev. Računamo vsoto

$$\sum_{x=1}^n \frac{x^2 \cdot 4^x}{(x+1)(x+2)}.$$

Na prvi pogled se zdi, da bi lahko uporabili seštevanje po delih. Vendar diferenca, kot tudi antidiferenca, izraza $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$ nima enostavne oblike in s seštevanjem po delih ne bi prevedli začetne vsote na lažjo vsoto. Tako nam ne preostane drugega, kot da antidiferenco izraza v vsoti poiščemo po definiciji. Iščemo torej takšno funkcijo $F(x)$, za katero velja

$$F(x+1) - F(x) = \frac{x^2 \cdot 4^x}{(x+1)(x+2)}. \quad (5)$$

Desna stran zgornje enačbe je produkt racionalne funkcije in eksponentne funkcije 4^x , zato lahko sklepamo, da mora biti iste oblike tudi funkcija $F(x)$. Pišimo

$$F(x) = 4^x \cdot Q(x),$$

kjer je $Q(x)$ neka racionalna funkcija. Če to vstavimo nazaj v izraz (5), dobimo

$$4^{x+1} \cdot Q(x+1) - 4^x \cdot Q(x) = \frac{x^2 \cdot 4^x}{(x+1)(x+2)}.$$

Opazimo, da lahko na obeh straneh enačbe krajšamo z izrazom 4^x , kar nas privede do enačbe

$$4Q(x+1) - Q(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)}. \quad (6)$$

Funkcija na desni strani enačbe ima pola pri -1 in -2 , zato mora imeti ista pola tudi funkcija na levi strani enačbe. Opazimo, da če ima $Q(x)$ pol pri a , potem ima $Q(x+1)$ pol pri $a-1$. Če hočemo, da ima leva stran enačbe zelena pola, je torej dovolj vzeti takšno racionalno funkcijo $Q(x)$, ki ima en pol pri $a = -1$. Funkcijo $Q(x)$ iščemo v obliki

$$Q(x) = \frac{p(x)}{x+1},$$

kjer je $p(x)$ nek polinom. Če ta izraz za $Q(x)$ vstavimo nazaj v (6), dobimo

$$\frac{4p(x+1)}{x+2} - \frac{p(x)}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)}.$$

Če se znebimo ulomkov, ostanemo s polinomsko funkcijsko enačbo

$$4p(x+1)(x+1) - p(x)(x+2) = x^2. \quad (7)$$

Dobljeni enačbi lahko zadošča le polinom stopnje manjše ali enake 1, torej oblike

$$p(x) = bx + c.$$

Če ta predpis vstavimo nazaj v (7), dobimo

$$4(b(x+1) + c)(x+1) - (bx+c)(x+2) = x^2.$$

Pokažimo še en postopek iskanja vrednosti parametrov v polinomske enačbi. Če v enačbo namesto x zaporedoma vstavimo vrednosti -1 in 0 , dobimo enačbi

$$\begin{aligned} 0 - (-b + c) &= 1, \\ 4(b + c) - 2c &= 0. \end{aligned}$$

Ta sistem rešita parametra $b = \frac{1}{3}$ in $c = -\frac{2}{3}$, ki nam dasta polinom

$$p(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Sedaj poznamo predpis racionalne funkcije

$$Q(x) = \frac{p(x)}{x+1} = \frac{x-2}{3(x+1)}.$$

in posredno še antidiference

$$F(x) = 4^x \cdot Q(x) = \frac{4^x(x-2)}{3(x+1)}.$$

Vrednost iskane vsote je enaka

$$\sum_{x=1}^n \frac{x^2 \cdot 4^x}{(x+1)(x+2)} = \left. \frac{4^x(x-2)}{3(x+1)} \right|_1^{n+1} = \frac{4^{n+1}(n-1)}{3(n+2)} + \frac{2}{3}.$$

Literatura

- [1] G. Boole, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea Scientific Books **5**, Chelsea Publishing Company, New York, 1970.
- [2] D. F. Gleich, *Finite Calculus: A tutorial for solving nasty sums*, dostopno na <https://www.cs.purdue.edu/homes/dgleich/publications/Gleich%202005%20-%20hierarchical%20directed%20spectral.pdf>.