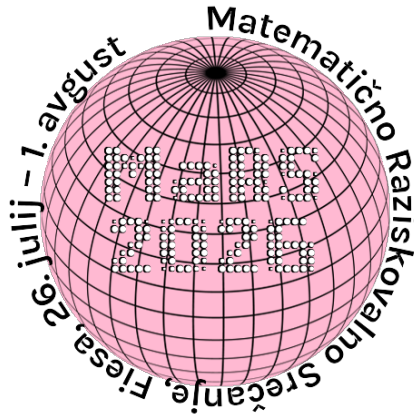


Jožefov problem

Klara Jug, Stela Petrinić, Brina Umek

Mentor: Jan Genc



Povzetek

V članku je obravnavan Jožefov problem. Najprej je rešena poenostavljena različica problema. Končna formula je izpeljana s principom indukcije in je interpretirana v binarnem sistemu.

1 Uvod

Jožefov problem je problem v informatiki in matematiki, ki je zelo podoben izštevanki. Udeleženci stojijo v krogu in čakajo na usmritev. Štetje se začne pri prvi osebi v krogu in se nadaljuje v določeni smeri tako, da večkrat preskočimo enako število ljudi in potem usmrtime naslednjega, dokler ne ostane samo še poslednji. Cilj udeleženca izštevanka je, da se postavi na tisto mesto, kjer bo najdlje preživel.

2 Indukcija

Indukcija je način dokazovanja matematičnih trditev. Poteka na naslednji način. Recimo, da dokazujemo neko lastnost P za vsa naravna števila. Naj $P(n)$ označuje trditev, da lastnost P velja za naravno število n . Vsak dokaz z indukcijo vključuje naslednje korake.

Baza indukcije. Dokažemo $P(1)$.

Indukcijska predpostavka. Naj bo k poljubno naravno število, predpostavimo, da velja $P(k)$.

Indukcijski korak. Z indukcijsko predpostavko dokažemo, da velja tudi $P(k+1)$.

S tem dokažemo, da velja $P(n)$ za vsako naravno število n . Sedaj pokažimo dva zgleda uporabe indukcije.

Zgled 1. Dokažimo, da za vsako naravno število k velja $6 \mid 5^{2k-1} + 1$.

Najprej dokažemo bazni primer $k = 1$. To preverimo z računom $5^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 5 + 1 = 6$, kar je deljivo s 6, torej bazni primer drži.

Sledi indukcijski korak. Indukcijska predpostavka je, da trditev velja za nek $k \in \mathbb{N}$, torej da $6 \mid 5^{2k-1} + 1$.

Število $5^{2k-1} + 1$ je deljivo s 6, zato je oblike $5^{2k-1} + 1 = 6l$ za neko naravno število l . Iz tega lahko izrazimo $5^{2k-1} = 6l - 1$. Dokazati je treba, da je $6 \mid 5^{2(k+1)-1} + 1$. Sledi

$$5^{2(k+1)-1} + 1 = 5^{2k+1} + 1 = 5^{2k-1} \cdot 5^2 + 1 = (6l - 1) \cdot 5^2 + 1 = 6l \cdot 25 - 24 = 6 \cdot (25l - 4),$$

kar pomeni, da $6 \mid 5^{2k-1} + 1$ in zaključi induksijski korak.

Zgled 2. Društvo DMFA Slovenije gospoda profesorja Jana obdari z neskončno mnogo kovanci za 2€ in neskončno mnogo bankovci za 5€. Jan želi kupiti malico za tekmovalce na državnem tekmovanju iz matematike, ki stane n €. Dokažimo, da za $n \geq 4$ profesor Jan na blagajni lahko plača točno ceno.

Ločeno obravnavamo sode in liha števila n . Pri dokazovanju uporabimo princip indukcije.

Najprej dokažimo bazo indukcije $n = 4$ za sode n . z dvema kovancema za 2€ lahko dobimo 4€.

Nadaljujemo z induksijskim korakom za sode števila. Recimo, da lahko za neko sodo število n izvedemo željeno plačilo. Iz tega sledi, da lahko izvedemo plačilo tudi za naslednje sode število, saj lahko le doplačamo 2€.

Prvotno trditev smo tako dokazali za sode števila n .

Oglejmo si še bazni primer $n = 5$ za liha števila n . Plačilo za najmanjši $n = 5$ lahko storimo z enim samim bankovcem po 5€.

Izvedimo še induksijski korak. Če je plačilo mogoče plačati za neko liho število, lahko doplačamo 2€ in dobimo ustrezno plačilo za naslednje liho število.

Tezo smo dokazali za liha števila n in tako za vsa naravna števila $n \geq 4$.

2.1 Močna indukcija

Denimo, da dokazujemo neko lastnost P za vsa naravna števila. Naj $P(n)$ označuje trditev, da lastnost P velja za naravno število n .

Baza indukcije. Dokažemo $P(1)$.

Induksijska predpostavka. Naj bo k poljubno naravno število. Predpostavimo, da veljajo lastnosti $P(1), P(2), \dots, P(k)$.

Induksijski korak. Z induksijsko predpostavko dokažemo, da velja tudi $P(k+1)$.

S tem dokažemo, da velja $P(n)$ za vsako naravno število n . Hitro se da razmisliti, da sta indukcija in močna indukcija ekvivalentni metodi. Oglejmo si primer dokazovanja s slednjo.

Zgled 3. Triangulacija je vsaka razdelitev n -kotnika brez samopresečišč, kjer je n naravno število, za katerega velja $n \geq 3$, na trikotnike z oglišči v n -kotniku, ki nimajo skupnih notranjosti. Dokažimo z močno indukcijo, da je vsaka triangulacija n -kotnika sestavljena iz $n - 2$ trikotnikov.

Najprej dokažimo bazo $n = 3$. V tem primeru dobimo trikotnik, ki je razdeljen po edini možni razdelitvi, kar dokaže tezo za $n = 3$.

Za induksijski korak uporabimo močno indukcijo in tako predpostavimo, da trditev velja za vsa števila manjša ali enaka n .

Želimo dokazati, da je $(n+1)$ -kotnik sestavljen iz $(n+1) - 2 = n - 1$ trikotnikov. Vemo, da triangulacija vsebuje eno diagonalo, ki jo označimo z D . Diagonala D razdeli naš $(n+1)$ -kotnik na a -kotnik in b -kotnik. Prvotni $(n+1)$ -kotnik ima $a + b - 2$ oglišč (odštejemo dve, ker sta dve oglišči (stičišči a -kotnika z b -kotnikom) šteti dvakrat). Lahko zapišemo $a + b - 2 = n + 1$ oz. $a + b = n + 3$.

Po induksijski predpostavki ima a -kotnik $a - 2$ trikotnikov in b -kotnik $b - 2$ trikotnikov, celotna triangulacija našega $(n+1)$ -kotnika pa $(a - 2) + (b - 2)$ oz. $a + b - 4$ trikotnikov, kar je enako

$$a + b - 4 = (n + 3) - 4 = n - 1,$$

in dokaže, da je $(n+1)$ -kotnik po triangulaciji sestavljen iz $n - 1$ trikotnikov. To zaključi induksijski korak.

Sedaj imamo vse znanje, da se lahko lotimo našega osrednjega problema.

3 Jožefov problem

3.1 Zgodovinsko ozadje

Problem je poimenovan po vojskovodji in judovskem zgodovinarju Flaviju Jožefu, ki je živel v 1. stoletju. S svojimi štiridesetimi vojaki se je znašel ujet v jami, ki jo je obkolila rimska vojska. Odločili so se za medsebojni pobjo, da jih Rimljani ne bi ubili, saj bi jim to bilo preveč pod častjo. Pobjo je potekal na sledeči način. Postavili so se v krog. Vojak številka 1 je ubil vojaka za dva živa v levo - preskočil je sebe in še enega živega. Naslednji vojak po predhodno ubitem je storil enako in postopek se je nadaljeval, dokler naj bi ostal le še en vojak, ki bi moral ubiti samega sebe. Izkazalo se je, da je Jožef s še enim sojetnikom ostal zadnji živ. Iz neznanega razloga sta se raje, kot da bi se ubila, predala Rimljanom.

3.2 Poenostavitev problema

Za lažje reševanje poenostavimo problem. Spremenimo število vojakov, ki jih pri vsakem koraku preskočimo, tako da število preskočenih vojakov ni 2, kot pri izvirnem Jožefovem problemu, ampak preskočimo samo enega – tistega, ki ubije naslednjega. Zanima nas, kam se moramo postaviti, da bomo ostali zadnji živi. Naj bo število vseh vojakov v krogu enako n in $f(n)$ številka mesta, kamor se moramo postaviti, da ostanemo zadnji živi.

Najprej si skiciramo kroge z $n = 1, 2, \dots, 16$ vojakov in pričnemo s simulacijo izštevanke. Rešitve prikažemo s tabelo, nato iz nje sklepamo odgovor in ga potem dokažemo.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Najprej opazimo naslednjo lastnost. Pri n , ki je potenca naravnega ali ničelnega eksponenta števila dva, je zmagovalno mesto tisto, pri katerem začnemo simulacijo izštevanke.

Trditev 1. Če je $n = 2^k$, kjer je $k \in \mathbb{N}_0$, je $f(n) = 1$.

Dokaz. Trditev dokažimo z indukcijo, bazni primer je $k = 0$. Pri indukcijskem koraku predpostavimo, da za $n = 2^k$ velja $f(n) = 1$ in dokažemo trditev za $n = 2^{k+1}$. Vemo, da je $n = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$. V prvem krogu umrejo vse sode številke, kar pomeni, da ostane $\frac{1}{2} \cdot 2^{k+1} = 2^k$ ljudi. Po tem ko so vse sode številke mrtve je na potezi vojak številka 1. V igri je takrat 2^k ljudi in vemo po indukcijski predpostavki, da bo vojak, ki začne zmagal. $\square$

Sedaj dokažimo še dve formuli, s pomočjo katerih poiščemo končno rešitev. Začnimo pri sodih številkah vojakov.

Trditev 2. Če je $n = 2k$ sodo število, velja $f(2k) = 2f(k) - 1$.

Dokaz. V prvem krogu umrejo vsi vojaki s sodimi številkami in po njem je na potezi spet vojak številka 1. Število živih vojakov je tedaj $\frac{n}{2} = \frac{2k}{2} = k$. Preimenujmo preživele vojake po vrsti z oznakami $1, 2, 3, \dots, k$. Po definiciji funkcije f zmaga vojak $f(k)$, saj je ostalo k vojakov, poimenovani so s prvimi k naravnimi števili ter je na potezi vojak številka 1. Opazimo, da če ima vojak po preimenovanju številko x , je imel pred poimenovanjem številko $2x - 1$. Sledi, da celotno igro zmaga vojak $2f(k) - 1$. Po definiciji funkcije f zmaga vojak $f(2k)$. V obeh primerih ima zmagovalec enako številko, zato lahko enačimo $2f(k) - 1 = f(2k)$. $\square$

Podobno dokažemo tudi za liha števila.

Trditev 3. Če je $n = 2k + 1$ liho število, velja $f(2k + 1) = 2f(k) + 1$.

Dokaz. V prvem krogu umrejo vsi vojaki s sodimi številkami in vojak 1. Nato preimenujemo preživele vojake po vrsti z oznakami $1, 2, 3, \dots, k$. Živih je k vojakov, zato je po definiciji funkcije f zmagovalec igre vojak $f(k)$. Celotno igro pa zmaga $f(2k + 1)$, torej lahko podobno kot prej enačimo $f(2k + 1) = 2f(k) + 1$. $\square$

Trditev 4. Če je $n = 2^k + l$, kjer velja $0 \leq l < 2^k$, je $f(n) = 1 + 2l$.

Dokaz. Trditev dokazimo z močno indukcijo na n . Baza je dokazana v zgornji tabeli. Izvedimo induksijski korak. Najprej obravnavajmo primer, ko je n sodo število. Tedaj je $n = 2^k + l$, pri čemer je l sod. Predpostavljamo, da je trditev resnična za vsa manjša števila od n . Število l lahko zapišemo kot $2t$. Ker je po induksijski predpostavki $l < 2^k$, zapišemo $2 \cdot t < 2^k$ oz. $t < 2^{k-1}$. Računamo

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2^k + l) = \\ &= f(2^k + 2t) = \\ &= f(2 \cdot (2^{k-1} + t)) = \\ &\stackrel{(1)}{=} 2 \cdot f(2^{k-1} + t) - 1 = \\ &\stackrel{(2)}{=} 2 \cdot (2 \cdot t + 1) - 1 = \\ &= 2 \cdot (l + 1) - 1 = \\ &= 2 \cdot l + 1. \end{aligned}$$

V koraku 1 smo uporabili trditev 2. V koraku 2 smo uporabili induksijsko predpostavko. Izvedimo še induksijski korak za liha števila n , torej ko je $n = 2^k + l$, pri čemer je l lih. Število l lahko zapišemo kot $2 \cdot t + 1$. Po induksijski predpostavki velja $l < 2^k$, lahko zapišemo $2 \cdot t + 1 < 2^k$, zato velja tudi $2 \cdot t < 2^k$ oz. $t < 2^{k-1}$. Računamo

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2^k + l) = \\ &= f(2^k + 2t + 1) = \\ &= f(2 \cdot (2^{k-1} + t) + 1) = \\ &\stackrel{(1)}{=} 2 \cdot f(2^{k-1} + t) + 1 = \\ &\stackrel{(2)}{=} 2 \cdot (2 \cdot t + 1) + 1 = \\ &= 2 \cdot l + 1. \end{aligned}$$

V koraku 1 smo uporabili trditev 3. V koraku 2 smo uporabili induksijsko predpostavko. S tem je indukcija zaključena. $\square$

Zanima nas še splošna formula za $f(n)$ v odvisnosti od n (brez zapisa $2l + 1$), zato ponovimo osnove logaritemske funkcije.

Definicija 1. Naj bo a pozitivno realno število, ki ni enako 1, ter c pozitivno realno število. Potem definirajmo $\log_a c$ kot takšno realno število b , za katerega velja enakost $a^b = c$.

Zgled 4. Iz $2^5 = 32$ sledi $\log_2 32 = 5$.

Vemo, da za $n = 2^k + l$, kjer je $0 \leq l < 2^k$, velja $f(n) = 2l + 1$ po trditvi 4. Iz enačbe $n = 2^k + l$ sledi $\log_2 n = \log_2(2^k + l)$, temu izrazu ocenimo spodnjo in zgornjo mejo. Pri tem upoštevamo, da je funkcija $g(x) = \log_2 x$ naraščajoča. Ugotovimo, da velja

$$\log_2(2^k + l) \geq \log_2(2^k + 0) = \log_2 2^k = k.$$

Zgornja meja je

$$\log_2(2^k + l) < \log_2(2^k + 2^k) = \log_2 n(2^{k+1}) = k + 1.$$

Sledi $\log_2 n \in [k, k + 1)$. To pomeni, da je $\lfloor \log_2 n \rfloor = k$. Tukaj smo uporabili naslednjo funkcijo, ki nam število zaokroži navzdol na najbližje celo število.

Definicija 2. Realnemu številu a lahko s **funkcijo celi del** priredimo število $\lfloor a \rfloor$, ki je največje celo število b , za katerega velja $b \leq a$.

Posledično je

$$n = 2^k + l = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + l.$$

Iz tega izrazimo $l = n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$ in končno sledi

$$f(n) = 2l + 1 = 2 \left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \right) + 1.$$

S tem smo dokazali naslednjo trditev.

Trditev 5. *Naj bo v krogu n vojakov. Potem se moramo postaviti na mesto $2 \left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \right) + 1$, da v poenostavljenem Jožefovem problemu ostanemo zadnji živi.*

Poglejmo si primer uporabe.

Zgled 5. *Če je na taboru MaRS 28 astronautov, izračunajmo, na katero mesto se moramo postaviti, da ostanemo zadnji živi. Izračunamo*

$$f(28) = 2l + 1 = 2 \left(28 - 2^{\lfloor \log_2 28 \rfloor} \right) + 1 = 2 \left(28 - 2^4 \right) + 1 = 2(28 - 16) + 1 = 25,$$

kar pomeni, da 25. mesto zadošča, da ostanemo zadnji živi.

Glavno ugotovitev sedaj predstavimo z enostavnejšim zapisom.

Trditev 6. *Vrednost $f(n)$ v binarnem sistemu dobimo tako, da v binarnem zapisu števila n vodilno enico na levi strani premaknemo na zadnje mesto.*

Dokaz. Poljubno število lahko enolično zapišemo v binarnem sistemu kot $n = 2^k + l = \overline{1a_{k-1} \dots a_1 a_0}_{(2)}$, kjer so števila a_i za $i = 1, 2, \dots, n-1$ iz množice $\{0, 1\}$, ter zmagovalno mesto kot $f(n) = 2l + 1$. Zapis 2^k predstavlja najvišjo potenco z osnovo 2, ki je manjša ali enaka n . Vemo tudi, da je l oblike

$$l = 2^{k-1} \cdot a_{k-1} + 2^{k-2} \cdot a_{k-2} + \dots + 2^1 \cdot a_1 + 2^0 \cdot a_0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} f(n) &= 2l + 1 = \\ &= 2 \cdot (2^{k-1} \cdot a_{k-1} + 2^{k-2} \cdot a_{k-2} + \dots + 2^1 \cdot a_1 + 2^0 \cdot a_0) + 1 = \\ &= 2^k \cdot a_{k-1} + 2^{k-1} \cdot a_{k-2} + \dots + 2^2 \cdot a_1 + 2^1 \cdot a_0 + 2^0 \cdot 1 = \\ &= \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0 1}_{(2)}, \end{aligned}$$

kar dokaže tezo. □

Zgled 6. *Na taboru MaRS je 28 astronautov, kar lahko zapišemo kot $11100_{(2)}$. Ko izvedemo premik skrajno leve številke na skrajno desno stran, dobimo*

$$f(n) = 11001_{(2)} = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 = 25.$$

Opazimo, da se rezultat ujema z rezultatom, dobljenim s formulo za $f(n)$.

3.3 Vrnitev k osnovnemu problemu

S pomočjo metode indukcije smo torej izpeljali formulo za preskakovanje dveh oseb v krogu.

V osnovi sicer Jožefov problem vključuje preskakovanje treh oseb, vendar za tako obliko problema trenutno še ni znano, kako bi zapisali splošno formulo za izračun, kdo preživi, znan je le algoritem. S predznanjem in na novo pridobljenim znanjem za zdaj tudi mi še nismo uspeli priti do splošne formule. Zato smo se odločili, da rešitev problema zapišemo še v binarnem sistemu.

4 Zaključek

Premeteni Jožef je očitno poznal način kako rešiti problem s preskakovanjem po dva vojaka, saj je ostal med zadnjima dvema preživelima. Njegova formula ostaja zapleten matematični problem, ki za zdaj še ni napisan v splošni formuli.

5 Literatura

- [1] Wikipedija. Jožef Flavij. Pridobljeno 30. 7. 2026 s spletne strani: https://sl.wikipedia.org/wiki/Jo%C5%BEef_Flavij.
- [2] Wikipedija. Josephus problem. Pridobljeno 31. 7. 2026 s spletne strani: https://en.wikipedia.org/wiki/Josephus_problem.
- [3] Jakob Jurij Snoj. Indukcija. Pridobljeno 30. 7. 2026 s spletne strani: https://http.rezultati.dmfa.si/Tekmovanja/MaSSA/Dokumenti/indukcija_predavanje.pdf.