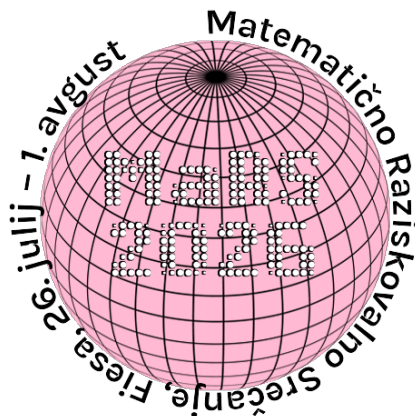


Kockarjev propad

Brin Osojnik, Naj Strmšek

Mentor: Nives Gošnjak



Povzetek

V članku so predstavljene osnove verjetnostne teorije, s pomočjo katere smo rešili osnovni problem Kockarjevega propada (angleško *Gambler's ruin*). Za lažje razumevanje postopka reševanja so predstavljene tudi rekurzivne zveze s poudarkom na reševanju nekaterih enostavnejših zvez.

1 Uvod

Osrednji problem, ki ga v tem članku rešimo, se imenuje Kockarjev propad (angleško *Gambler's ruin*). V njem kockar igra igro na srečo, ki jo začne z nekim začetnim zneskom, vsako potezo pa se mu znesek poviša ali zniža za en kovanec – glede na to, ali ga zmaga ali zgubi. Verjetnost zmage je za vsako potezo enaka, prav tako so izidi potez med seboj neodvisni. Kockar igro igra, dokler ne doseže nekega končnega zelenega zneska, ki je seveda višji od začetnega in je določen pred začetkom igre, ali pa mu zmanjka kovancev in bankrotira. Nas zanima, kolikšna je verjetnost, da kockarju uspe zaslužiti zelen dobiček pred bankrotom in kako je ta vrednost odvisna od začetnega in končnega zneska ter same pravičnosti igre. Preden lahko rešimo ta problem, moramo najprej ugotoviti, kaj sploh je verjetnost, za lažje razumevanje nekaterih rezultatov pa bomo spoznali osnove rekurzivnih zvez.

2 Verjetnost

2.1 Osnovne definicije

Teorija verjetnosti se je razvila ravno zaradi iger na srečo, kjer so matematiki želeli ugotoviti, katere igre se jim najbolj splača igrati. Veda se je od takrat močno razširila, glavna ideja pa ostaja, da opazujemo kaj se dogaja pri nekem naključnem poizkusu, kot sta na primer met kovanca ali navadne kocke. Vsakemu možnemu rezultatu poizkusa pravimo izid, množicam izidov pa dogodki. Pri metu kocke so tako možni izidi, da pade število 1, 2, 3, 4, 5 ali 6, medtem ko je en možen dogodek lahko to, da pade 6, lahko pa je dogodek tudi to, da pade sodo število, kar je unija izidov, ko pade 2, 4 ali 6. Verjetnost definiramo kot funkcijo, ki vsakemu dogodku priredi vrednost, ki nam pove kako verjetno je, da se dogodek zgodi. Izkaže se, da so vse te vrednosti med 0 in 1, kjer 1 priredimo gotovim dogodkom, 0 pa nemogočim.

Definicija 1. Verjetnostni prostor je trojica $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kjer je Ω množica vseh možnih izidov, $\mathcal{A}$ množica vseh dogodkov in $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ verjetnost.

Definicija 2. Nasprotni dogodek oz. komplement dogodka A se označi z A^c ali $\bar{A}$ in zajema vse izide v Ω , ki ne spadajo pod dogodek A .

Definicija 3. Presek dogodkov A_1 in A_2 se označi z $A_1 \cap A_2$ in predstavlja vse izide, ki se pojavijo tako v A_1 kot v A_2 .

Definicija 4. Dogodek je vsebovan v drugem, če se vsak izid, ki se pojavi v prvem, pojavi tudi v drugem. Matematično to označimo kot $A \subseteq B$.

Da je verjetnost smiselno definirana, mora kot funkcija zadoščevati nekaterim aksiomom.

Aksiom 1. Za vsak dogodek $A \in \mathcal{A}$ velja $P(A) \geq 0$.

Aksiom 2. $P(\Omega) = 1$.

Aksiom 3. Za množico paroma disjunktne dogodkov $A_1, A_2, \dots, A_n$ velja

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Na podlagi teh aksiomov lahko izpeljemo še nekaj osnovnih posledic, ki nam pomagajo tako pri razumevanju kot tudi pri samem računanju verjetnosti.

Posledica 1. $P(\emptyset) = 0$.

Dokaz. V aksiom 3 vstavimo za vse disjunktne množice prazno množico n -krat in m -krat, kjer sta m in n različni naravni števili. Tako dobimo enačbo $nP(\emptyset) = mP(\emptyset)$, kar je mogoče le, če je $P(\emptyset) = 0$. $\square$

Posledica 2. Naj bosta A_1 in A_2 disjunktne dogodke, potem velja $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Dokaz. V aksiom 3 vstavimo za vse disjunktne množice, razen prvih dveh, prazne množice. $\square$

Posledica 3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Dokaz. V posledico 2 vstavimo $A_1 = A^c$ in $A_2 = A$. $\square$

Posledica 4. $0 \leq P(A) \leq 1$.

Dokaz. Ker je $P(\bar{A}) \geq 0$ in zaradi prejšnje posledice, sledi $1 - P(A) \geq 0$ oziroma $P(A) \leq 1$, po prvem aksiomu pa je tudi $P(A) \geq 0$. $\square$

Posledica 5. Če je A vsebovan v B , potem velja $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

Dokaz. Množici A in $B \setminus A$ sta disjunktne in velja $B = A \cup (B \setminus A)$. Po prejšnji posledici dobimo $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Ker je po prvem aksiomu $P(B \setminus A) \geq 0$, sledi $P(B) \geq P(A)$. $\square$

Posledica 6. Za poljubni množici A in B velja $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dokaz. Velja $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, pri čemer sta množici A in $B \setminus A$ disjunktne, zato velja enakost $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Nadalje velja $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, kjer sta množici ponovno disjunktne, zato dobimo $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$. Od tod izpeljemo

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B),$$

kar vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$\square$

2.2 Pogojna verjetnost

Pogojno verjetnost si najprej oglejmo na primeru, ko imamo v vreči 13 kroglic, od katerih je 7 črnih in 6 belih. Če vemo samo to in iz vreče na slepo povlečemo eno od kroglic, bo ta z verjetnostjo $\frac{7}{13}$ črne barve. Sedaj pa dodajmo še podatek, da je 5 črnih kroglic tudi mehkih, ena mehka pa je tudi bela. Če sedaj izvlečemo eno od kroglic, ki je na otip mehka, se verjetnost, da bo črne barve spremeni. Vseh mehkih kroglic je le 6, od tega je 5 črnih, torej je verjetnost, da je kroglica črna, pri pogoju, da je mehka, enaka $\frac{5}{6}$. Ideja kako izračunamo spretnost izhaja iz tega, da se je število vseh možnih izidov zmanjšalo le na tiste, ki so zadostovali našemu pogoju, v tem primeru, da je kroglica bila mehka. Prav tako smo za uspešne izide upoštevali le tiste, ki zadoščajo obema pogojema, v tem primeru, da je kroglica mehka in črna.

Definicija 5. Naj bosta A in B dva možna dogodka in naj bo $P(B) \neq 0$. Verjetnost dogodka A pri pogoju, da se je zgodil dogodek B označujemo s $P(A|B)$ in izračunamo po formuli

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Izrek 1 (Izrek o popolni verjetnosti). Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_n$ paroma disjunktni dogodki, za katere velja $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ in $P(A_i) > 0$ za vsak i . Tedaj za poljuben dogodek B velja

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) P(A_i).$$

Dokaz. Iz pogoja, da je unija vseh dogodkov A_i enaka Ω , sledi

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i).$$

Ker so dogodki A_i paroma disjunktni, so paroma disjunktni tudi dogodki $B \cap A_i$, saj za $i \neq j$ velja

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \emptyset = \emptyset.$$

Od tod po aksiomu 3 dobimo

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i).$$

Po definiciji pogojne verjetnosti je $P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}$. Zato velja $P(B \cap A_i) = P(B|A_i) P(A_i)$. Če to enakost vstavimo v zgornjo vsoto, dobimo izrek o popolni verjetnosti

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) P(A_i).$$

□

Poseben primer izreka je, ko za paroma disjunktni dogodke uporabimo kar dogodka A in $\bar{A}$, katerih unija je po definiciji enaka Ω . Najpogosteje nam to olajša računanje, ko lahko verjetnost dogodka B razdelimo na neke začetne pogoje in v tem primeru dobimo

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}).$$

Računanje pogojne verjetnosti po definiciji lahko zaradi potrebe po izračunu verjetnosti presekov dveh dogodkov hitro postane zahtevno, zato poznamo še eno formulo, ki nam delo občasno olajša.

Izrek 2 (Bayesov izrek). Naj bosta A in B dogodka in naj $P(A) \neq 0$ ter $P(B) \neq 0$. Potem velja

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Dokaz. Iz definicije pogojne verjetnosti dobimo enačbi $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ in $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Prvo enačbo pomnožimo s $P(A)$ in drugo s $P(B)$ ter dobimo $P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$. Skrajni strani enakosti delimo z $P(A)$ in dobimo želen rezultat. □

3 Rekurzija

Med reševanjem problema Kockarjevega propada bomo ugotovili, da njegovo rešitev najlažje najdemo s pomočjo rekurzije oz. rekurzivnih zvez. V nadaljevanju si bomo pogledali kako te najlažje in najhitreje rešimo.

3.1 Osnovne definicije

Definicija 6. Zaporedje realnih števil je preslikava a iz $\mathbb{N}_0$ v $\mathbb{R}$. Pri tem pa n -ti člen zaporedja označimo z a_n .

Definicija 7. Rekurzivna zveza je matematično pravilo, ki vsak člen zaporedja definira s pomočjo enega ali več prejšnjih členov.

Definicija 8. Linearna homogena rekurzivna zveza k -tega reda s konstantnimi koeficienti je enačba oblike

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

kjer so $c_1, c_2, \dots, c_k$ realne konstante, ne vse enake 0. Za natančno določenost zaporedja moramo podati tudi k robnih pogojev – to so natančne vrednosti za k členov zaporedja.

Zgled 1. Fibonaccijevo zaporedje je lep primer rekurzivne zveze, saj je vsak nov člen definiran s pomočjo prejšnjih dveh. Pravilo za izračun poljubnega (n -tega) člena je povsem preprosto, sešteti moramo le njegova dva neposredna predhodnika. S formulo to rekurzivno pravilo zapišemo kot

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Začetni vrednosti zaporedja sta določeni s $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$. Z upoštevanjem tega pravila zaporedje gradimo korak za korakom, tako za drugi člen seštejemo 0 in 1 ter dobimo 1. Za tretji člen seštejemo 1 in 1 ter dobimo 2 in za četrtega seštejemo 1 in 2 ter dobimo 3. Če ta postopek nadaljujemo, dobimo znano zaporedje števil 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Problem tako podanega zaporedja je, da za izračun poznejših členov zaporedja potrebujemo tudi veliko predhodnih členov. Že na primeru Fibonaccijevega zaporedja hitro opazimo, da če želimo izvesti 50. Fibonaccijevo število, bi postopoma morali izračunati vse predhodne člene. Takšen način reševanja problema je seveda zamuden, zato si bomo pri reševanju našega problema pomagali s karakterističnimi enačbami.

Definicija 9. Karakteristična enačba za linearno homogeno rekurzivno zvezo s konstantnimi koeficienti je algebrastična enačba, ki jo dobimo z vstavljanjem nastavka $a_n = r^n$ (kjer je $r \neq 0$) v rekurzivno zvezo.

Reševanje rekurzivnih zvez je v splošnem lahko zahtevno, kar pa ne velja za linearne homogene rekurzije s konstantnimi koeficienti. Pri njihovem reševanju uporabimo dve ključni ideji. Iščemo rešitve eksponentne oblike $a_n = r^n$, kjer je r konstanta, hkrati pa je poljubna linearna kombinacija dveh rešitev linearne homogene rekurzije je prav tako rešitev.

Ko vstavimo $a_n = r^n$ v rekurzivno zvezo $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$, dobimo

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}.$$

Če celotno enačbo delimo z r^{n-k} in vse člene prenesemo na levo stran, dobimo karakteristično enačbo

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0.$$

Rešitve r te enačbe se imenujejo karakteristični koreni in nam omogočajo zapis eksplicitne formule za n -ti člen.

3.2 Rekurzivne zveze drugega reda

Posvetimo se rekurzivnim zvezam drugega reda, saj se pojavljajo pri reševanju našega glavnega vprašanja. Slednje imajo obliko $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$, njihova karakteristična enačba pa je kvadratna enačba oblike $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Definicija 10. *Zaporedje je rešitev rekurzivne zveze, če vsak člen zaporedja zadošča dani enačbi in zanj veljajo dani robni pogoji.*

Zgled 2. Vrnimo se znova na Fibonaccijevo zaporedje. Zanj velja rekurzivna zveza $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, z začetnimi pogoji $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$. Fiboanccijevo zaporedje je torej rešitev te rekurzivne zveze. Po drugi strani lahko spremenimo začetne pogoje, na primer $F_0 = 2$ in $F_1 = 3$. V tem primeru Fibonaccijevo zaporedje ni rešitev te zveze, saj ne zadošča njenim začetnim pogojem.

Kot že omenjeno, lahko s pomočjo rešitev karakterističnih enačb najdemo eksplicitno formulo za člene zaporedja, ki je rešitev njej pripadajoči rekurzivni zvezi. Izkaže se tudi, da je rešitev enolična in natančno določena s karakterističnimi koreni in začetnimi pogoji. V našem primeru ima enačba natanko dve rešitvi, ki jih znamo izračunati s pomočjo formule za kvadratno enačbo. Glede na to, ali sta rešitvi različni ali enaki, ločimo ekspliciten zapis rešitve rekurzivne zveze na dva primera.

Izrek 3. *Naj bosta c_1, c_2 realni konstanti in predpostavimo, da ima enačba $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ dve različni ničli r_1 in r_2 . Zaporedje $\{a_n\}$ je rešitev rekurzivne zveze $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ natanko tedaj, ko velja*

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

za vse $n \geq 0$, kjer sta α_1, α_2 konstanti, ki jih določimo iz začetnih pogojev.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je zaporedje oblike $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ res rešitev rekurzivne zveze. Ker sta r_1 in r_2 ničli karakteristične enačbe, velja $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ in $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$. Z vstavljanjem nastavka v desno stran rekurzivne zveze dobimo

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n, \end{aligned}$$

pri čemer smo za tretjo enakost uporabili zgoraj omenjeni enakosti za r_1 in r_2 .

Dokažimo še obratno in sicer, naj bo $\{a_n\}$ zaporedje, ki reši dano rekurzivno zvezo. Definirajmo tudi zaporedje $\{b_n\}$, da velja $b_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, pri čemer sta α_1 in α_2 konstanti. Če želimo, da zaporedje zadošča rekurzivni zvezi, mora zadostiti začetnim pogojem, te pa lahko izpeljemo iz že danega zaporedja $\{a_n\}$ in sicer $a_0 = b_0$ in $a_1 = b_1$. S pomočjo tega dobimo sistem enačb za α_1 in α_2

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ a_1 &= b_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$ in vstavimo v drugo

$$b_1 = \alpha_1 r_1 + (b_0 - \alpha_1) r_2 = \alpha_1 (r_1 - r_2) + b_0 r_2.$$

Od tod poračunamo

$$\alpha_1 = \frac{b_1 - b_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{in} \quad \alpha_2 = \frac{b_0 r_1 - b_1}{r_1 - r_2}$$

Ker sta korena r_1 in r_2 različna, sta konstanti α_1 in α_2 dobro definirani in enolično določeni z začetnima pogojema $a_0 = b_0$ in $a_1 = b_1$. S tem dobimo zaporedje $b_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, ki se z danim zaporedjem a_n ujema v prvih dveh členih ter po prvem delu dokaza zadošča isti rekurzivni zvezi. Ker je vsak nadaljnji člen obeh zaporedij enolično določen z isto rekurzivno formulo iz predhodnih dveh členov, sta zaporedji a_n in b_n identični za vsak $n \geq 0$, s čimer je dokaz končan. □

Zgled 3 (Izpeljava Binetove formule za Fibonaccijeva števila). Fibonaccijevo zaporedje zadošča zvezi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ z začetnima členoma $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$. Njena karakteristična enačba je $r^2 - r - 1 = 0$. Rešitvi enačbe sta

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{in} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

kar nam za poljuben člen da $F_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Z vstavljanjem začetnih pogojev $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$ dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ in $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, kar nam da znano eksplicitno **Binetovo formulo**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Izrek 4. Naj bosta c_1, c_2 realni konstanti ter $c_2 \neq 0$. Če ima enačba $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ le en koren r_0 z večkratnostjo 2, je zaporedje $\{a_n\}$ rešitev rekurzije $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ natanko tedaj, ko velja:

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

za vse $n \geq 0$, kjer sta α_1, α_2 konstanti.

Izrek bomo pustili brez dokaza, ideja pa je enaka kot v izreku 3.

Zgled 4. Rešimo rekurzivno zvezo $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ pri začetnih pogojih $a_0 = 1$ in $a_1 = 6$. Karakteristična enačba je $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$ ki ima eno samo dvojno rešitev $r_0 = 3$. Splošna rešitev je torej

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n.$$

Iz začetnih pogojev $a_0 = 1$ in $a_1 = 6$ dobimo sistem dveh enačb

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 = 1 \\ a_1 &= 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6. \end{aligned}$$

Od tod sledi $\alpha_1 = 1$ in $\alpha_2 = 1$. Končna rešitev rekurzivne zveze je tako $a_n = 3^n + n3^n = (1 + n)3^n$.

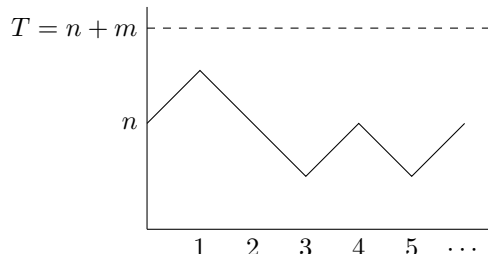
4 Kockarjev propad

Vrnimo se na naš osrednji problem, kjer kockar igra igro na srečo in se postavimo v vlogo kockarja. Za začetek reševanja tega problema je dobro naše podatke o igri natančneje matematično opisati in si jih označiti.

Definicija 11. Naj bo $p \in [0, 1]$ verjetnost zmage v vsaki potezi igre na srečo. Naj bosta n in m naravni števili, pri čemer z n označujemo svoj začetni znesek in z m zelen dobiček. Naj bo $T = n + m$ končna vsota denarja, ki jo želimo osvojiti. Potem pravimo, da igro zmagamo, če nam uspe priti do zelenega zneska T kovancev, preden bankrotiramo. Če se prej zgodi slednje, pravimo, da igro izgubimo. Dogodek zmage igre označujemo z Z .

Zgled 5. Poglejmo si takšno igro na primeru ameriške rulete, kjer je na kolesu 38 polj, od tega 18 črnih in 18 rdečih, 2 pa sta zeleni. Verjetnost zmage v posamezni potezi pri stavi na črna ali rdeča polja je enaka $p = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \approx 0,473$. Če vzamemo $n = 100$ € in $m = 100$ €, potem je $T = 200$ €. Zanima nas kolikšna je verjetnost, da si priigramo 100 € dobička, preden izgubimo začetnih 100 €.

Potek igre si lahko za lažjo predstavo narišemo kot graf, kjer spremljamo količino denarja po posamezni potezi. Po pravilih igre vemo, da si pri vsaki potezi z verjetnostjo p priigramo en kovanec, z verjetnostjo $1 - p$ pa ga izgubimo. Igro zmagamo, če na grafu zadanemo zgornjo mejo označeno z $T = n + m$ in izgubimo, če zadanemo spodnjo mejo 0 kovanec. Pri tem je vredno omeniti, da to nista edina možna izida igre, saj bi se lahko zgodilo, da nobene od mej ne zadanemo in igramo igro v neskončnost, čemur se bomo posvetili kasneje.



Skladno s tem definirajmo oznako D_i , ki označuje količino denarja po i -ti potezi. Pri tem je začetna količina denarja označena z D_0 .

Izkaže se, da bomo problem najhitreje rešili, če pri fiksnem T opazujemo verjetnost zmage, glede na začetno količino denarja. To najlažje označimo kot $P_n = P(Z|D_0 = n)$ verjetnost, da dosežemo T kovanec, pri čemer začnemo z n kovanci. Dobimo zaporedje, katerega člene bi radi izračunali v splošnem, saj imamo potem rešitev našega problema za poljubne n in m .

Trditev 1. Za zaporedje $\{P_n\}$ velja rekurzivna zveza $P_n = pP_{n+1} + (1 - p)P_{n-1}$, z robnima pogoje $P_0 = 0$ in $P_T = 1$. Pri tem je p verjetnost zmage v posamezni potezi.

Dokaz. Najprej preverimo smiselnost robnih pogojev. S P_0 označujemo verjetnost zmage, pri čemer smo začeli brez denarja. Po pravilih naše igre to pomeni, da smo že bankrotirali in igro končali, torej je verjetnost zmage res enaka 0. Podobno razmislimo, da P_T označuje verjetnost zmage, pri čemer smo začeli s T kovanci. Ker igro zmagamo takoj, ko dosežemo T kovanec, smo tokrat zmagali že pred samim začetkom, torej je verjetnost res enaka 1.

Težji del je dokazati rekurzivno zvezo, ki velja za ostale člene zaporedja. Pri tem je vredno omeniti, da nas členi poznejši od P_T v resnici ne zanimajo, saj igro vedno začnemo z manj kovanci, kot jih želimo osvojiti za zmago. Pri dokazu rekurzivne zveze si bomo pomagali z razdelitvijo prve poteze igre na dva možna izida in sicer na dogodek A , ki označuje zmago v prvi potezi, ki se zgodi z verjetnostjo p , in seveda $\bar{A}$, ki označuje poraz v prvi potezi in se posledično zgodi z verjetnostjo $1 - p$. Ko sedaj razpišemo definicijo našega zaporedja, dobimo

$$\begin{aligned} P_n &= P(Z|D_0 = n) \\ &= P(Z \cap A|D_0 = n) + P(Z \cap \bar{A}|D_0 = n) \\ &= P(A)P(Z|A \cap D_0 = n) + P(\bar{A})P(Z|\bar{A} \cap D_0 = n), \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali definicijo pogojne verjetnosti in izrek o popolni verjetnosti. Enačbo lahko še poenostavimo s tem, da poznamo vrednosti $P(A)$ in $P(\bar{A})$. Poleg tega lahko pomislimo, da nam zmaga v prvi potezi in začetna vrednost n kovanec pove, da se bo naša količina denarja povečala na $D_1 = n + 1$. Podobno iz poraza v prvi potezi in enake začetne količine denarja izpeljemo $D_1 = n - 1$ in vse skupaj zapišemo kot

$$P_n = pP(Z|D_1 = n + 1) + (1 - p)P(Z|D_1 = n - 1).$$

Sedaj se spomnimo, da so poteze med seboj neodvisne, kar pomeni, da na verjetnost zmage v resnici ne vpliva, koliko denarja smo imeli v preteklosti, temveč le koliko ga imamo ta trenutek. To pomeni, da je verjetnost zmage ob pogoju, da smo imeli n denarja na začetku ali da smo imeli n denarja po prvi potezi, enaka in dobimo

$$\begin{aligned} P_n &= pP(Z|D_0 = n + 1) + (1 - p)P(Z|D_0 = n - 1) \\ &= pP_{n+1} + (1 - p)P_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Od tukaj naprej moramo le še rešiti rekurzivno zvezo, ki jo prepišemo v $pP_{n+1} - P_n + (1-p)P_{n-1} = 0$ in izpeljemo karakteristično enačbo

$$pr^2 - r + 1 - p = 0.$$

Dobimo rešitvi $r_1 = \frac{1-p}{p}$ in $r_2 = 1$ ter opazimo, da sta enaki le za primer $p = \frac{1}{2}$, ki ga bomo obravnavali posebej.

V primeru, ko igra ni pravična, torej $p \neq \frac{1}{2}$ po izreku 4 dobimo formulo

$$P_n = A \left(\frac{1-p}{p} \right)^n + B \cdot 1^n = A \left(\frac{1-p}{p} \right)^n + B.$$

S pomočjo začetnih pogojev dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} P_0 = 0 &= A + B, \\ P_T = 1 &= A \left(\frac{1-p}{p} \right)^T + B. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $A = -B$, kar nam z vstavljanjem v drugo enačbo da

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^T - 1} \quad \text{in} \\ B &= \frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^T - 1}. \end{aligned}$$

Enačbo za splošni člen zaporedja lahko potem preoblikujemo v

$$P_n = \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^T - 1}.$$

S tem lahko natančno izračunamo verjetnost zmage v vsaki nepravični igri v odvisnosti od začetnega člena in zelene končne vrednosti. Vseeno pa ta enačba ni najlepša, zaradi česar si je težko predstavljati, kako zelo se vrednosti spreminjajo v odvisnosti od posameznih spremenljivk. Enačbo bi zato radi olepšali in verjetnost zmage le omejili navzgor, najraje v primeru nepravične igre, ko verjetnost ni na naši strani. V tem primeru velja poenostavitev

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^T - 1} \\ &\leq \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^n}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^T} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^m} \\ &= \left(\frac{p}{1-p} \right)^m. \end{aligned}$$

Za $p < \frac{1}{2}$ je $\frac{p}{1-p} < 1$, kar pomeni, da se verjetnost hitro manjša, ko povečujemo zelen dobiček. Poleg tega je ta omejitev popolnoma neodvisna od začetnega zneska, kar pomeni, da je verjetnost za zmago velikih dobičkov majhna ne glede na to, kako bogati igro začnemo.

Zgled 6. Vrnimo se na primer ameriške rulete. Ugotovili smo, da zanjo velja $p = \frac{9}{19}$, zanima pa nas verjetnost, da si priigramo dodatnih 100 €. Z vstavljanjem v dobljeno enačbo dobimo

$$P(Z) \leq \left(\frac{9}{10} \right)^{100} \leq \frac{1}{37648},$$

pri čemer je verjetnost neodvisna od našega začetnega zneska. Rezultat se nam lahko zdi precej presenetljiv, saj imamo občutek, da je igra skoraj pravična, verjetnost za zmago pa vseeno izjemno hitro pada.

Poglejmo si še primer, ko je igra pravična, torej $p = \frac{1}{2}$. Kot smo že prej izračunali, imamo dvojno rešitev $r = r_{1,2} = 1$ in dobimo enačbo za splošni člen

$$P_n = An \cdot 1^n + B \cdot 1^n = An + B.$$

S pomočjo robnih pogojev $P_0 = 0 = B$ in $P_T = 1 = AT + B$ hitro izpeljemo $B = 0$ in $A = \frac{1}{T}$, kar nam da natančen rezultat

$$P_n = \frac{n}{T}.$$

Kot lahko vidimo je pri pravični igri verjetnost zmage veliko bolj odvisna od razmerja med začetnim in končnim zneskom, kot samo od želenega dobička.

Zgled 7. Spomnimo se na igro Ameriške rulete, kjer si želimo priigrati 100 €. Kot smo že izračunali v zgledu 6, je verjetnost naše zmage, ne gledena našo začetno količino denarja, izredno majhna. Po drugi strani bi v primeru pravične igre, ki jo začnemo z 100 €, verjetnost zmage bila kar $\frac{100}{200} = \frac{1}{2}$. Če bi želeli verjetnost, da si prislužimo 100 € še povečati, bi lahko igro začeli z na primer 900 €, in bi verjetnost bila kar $\frac{900}{1000} = 0,9$.

Pri reševanju tega problema smo ugotovili, da se glede na konstrukcijo igre lahko zgodi, da igre nikoli ne bi končali – ne bi dosegli končnega zneska, prav tako pa nikoli ne bi izgubili vsega svojega denarja. To je zelo nezaželen rezultat igre, saj bi si želeli, da sta zmaga in poraz drug drugemu nasprotna dogodka, kar bi se zgodilo, če igra v neskončnost ni mogoča.

Trditve 2. Verjetnost, da bomo igro igrali v neskončnost, je za vsak p enaka 0.

Dokaz. Za začetek si oglejmo robna primera. Če je $p = 0$, bomo v vsaki potezi denar izgubili, torej se bo igra očitno končala, podobno bomo pri $p = 1$ v vsaki potezi denar dobili, kar nas tudi vodi do konca igre. V nadaljevanju lahko zato predpostavimo, da velja $0 < p < 1$.

Označimo s F dogodek igranja igre v neskončnost in definirajmo novo zaporedje $\{Q_n\}$, kjer je $Q_n = P(F|D_0 = n)$ verjetnost igre v neskončnost, če smo igro začeli z n kovanci, pri fiksnem T . Podobno kot v trditvi 1 lahko enostavno izračunamo robna pogoja $Q_0 = 0$ in $Q_T = 0$. Tako v primeru, ko začnemo igro brez denarja, kot v primeru, ko jo začnemo z zmagovalno količino, je igra takoj končana, torej je verjetnost, da jo bomo igrali v neskončnost res enaka 0. Za vse vmesne člene lahko s podobno razlago kot v dokazu trditve 1 izpeljemo rekurzivno zvezo

$$Q_n = pQ_{n+1} + (1-p)Q_{n-1}.$$

Opazimo, da ima enako karakteristično enačbo kot zaporedje $\{P_n\}$, razlikuje se le v robnih pogojih. Rešitve te karakteristične enačbe že poznamo, zato moramo zopet problem, ko je $p = \frac{1}{2}$ ločiti od primera $p \neq \frac{1}{2}$.

V primeru $p \neq \frac{1}{2}$ imamo enačbo za splošni člen

$$Q_n = A \left(\frac{1-p}{p} \right)^n + B.$$

Iz začetnega pogoja $Q_0 = 0 = A + B$ dobimo $A = -B$, kar lahko vstavimo v drug robni pogoj in odbimo

$$\begin{aligned} Q_T = 0 &= A \left(\frac{1-p}{p} \right)^T - A \\ &= A \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^T - 1 \right). \end{aligned}$$

Ker vemo, da $p \neq \frac{1}{2}$, mora za enakost enačbe veljati $A = 0$, kar pomeni da je tudi poljuben člen zaporedja $Q_n = 0$.

Ko je igra pravična in je $p = \frac{1}{2}$, je enačba za splošni člen enaka

$$Q_n = An + B.$$

Iz robnih pogojev $Q_0 = 0 = B$ in $Q_T = 0 = An + B$ dobimo $A = B = 0$, kar pomeni, da je igra v neskončnost tudi pri pravični igri skoraj nemogoča. $\square$

Za konec si pogledajmo še, kaj se zgodi, če igro igramo brez zgornje omejitve. Za igro, kjer sreča ni na naši strani, se nam zdi, da bomo po dolgem igranju vedno izgubili denar, saj bomo po velikem številu potez več denarja izgubili, kot dobili. Nam mogoče zanimivejši primer se pojavi pri igranju pravične igre, saj gotovega bankrota ne moremo utemeljiti kot pri nepravični igri.

Trditev 3. Če igramo pravično igro ($p = \frac{1}{2}$) in igramo brez zgornje meje – igra se konča le v primeru, ko ves denar izgubimo, potem je verjetnost, da se to zgodi enaka 1 ne glede na začetno vrednost denarja.

Dokaz. Pomagali si bomo tako, da bomo najprej verjetnost omejili s pomočjo verjetnosti, ko imamo zgornjo mejo T , nato pa bomo pogledali kako se vrednost spremeni, če T pošljemo proti neskončnosti.

Označimo z B dogodek našega bankrota. Očitno lahko to verjetnost omejimo z

$$P(B) \geq P(B \text{ preden dosežemo } T).$$

Ker vemo, da igra, kjer imamo zgornjo mejo ne more iti v neskončnost, je nasprotni dogodek od bankrota preden dosežemo T kar enak temu, da dosežemo T preden bankrotiramo. V preteklih dokazih smo temu dogodku rekli zmaga in ga označili z Z . Poleg tega, smo $P(Z)$ pri $p = \frac{1}{2}$ tudi izračunali in sicer je $P(Z) = \frac{n}{T}$. Zgornjo neenakost lahko zato zapišemo kot

$$\begin{aligned} P(B) &\geq 1 - P(Z) \\ &\geq 1 - \frac{n}{T}. \end{aligned}$$

V tem primeru je seveda n fiksna, kot obljubljeni pa T pošljemo proti neskončnosti in velja, da je

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{T}\right) = 1,$$

kar pomeni, da je tudi $P(B) = 1$. $\square$

Literatura

- [1] Janko Gravner. Lecture notes for introductory probability. *Oddelek za matematiko, Univerza Kalifornije*, 2010.
- [2] Tom Leighton and Ronitt Rubinfeld. Random walks. *Zapiski s predavanj, dostopno na <http://web.mit.edu/neboat/Public/6.042/randomwalks.pdf>*, 2006.
- [3] Kenneth H Rosen. *Discrete mathematics & applications*. McGraw-Hill, 1999.